Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica.
Examen parcial III. Variante α.

Método de gradiente, método de gradiente conjugado, descomposición en valores singulares, cálculo de valores propios.

Nombre: Calificación:

Problema 1. *15 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **método de gradiente conjugado**. Analice la complejidad de una iteración del algoritmo (cuente solamente las operaciones de multiplicación; suponga que el cálculo de la norma de un vector utiliza n multiplicaciones).

Problema 2. *15 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y estrictamente positiva definida, sean $r^{(0)} = b \in \mathbb{R}^n$ y sea $x^{(0)} = 0_n$. Escriba las fórmulas recursivas del **método de gradiente conjugado** y demuestre por inducción el teorema sobre la igualdad de subespacios en este método: para cada s

$$\ell(r^{(0)}, r^{(1)}, \ldots, r^{(s-1)}) = \ell(p^{(0)}, p^{(1)}, \ldots, p^{(s-1)}) = \ell(r^{(0)}, Ar^{(0)}, \ldots, A^{(s-1)}).$$

Problema 3. *15 %.*
Sea A una matriz real 2×2. Construya su **descomposición en valores singulares**, si están dados dos vectores $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ y $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ que forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ y tales que

$$Ap = -2p, \qquad Aq = 5q.$$

Problema 4. *15 %.*
Paso inductivo para la existencia de una descomposición en valores singulares. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$. Demuestre que existe un par de matrices unitarias U, V tales que

$$U^*AV = \left[\begin{array}{c|c} \|A\| & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right],$$

donde $B \in \mathcal{M}_{(m-1)\times(n-1)}(\mathbb{C})$.

Problema 5. *15 %.*
Tridiagonalización de una matriz real simétrica. En algún lenguaje de programación escriba una función que transforme una matriz real simétrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a una matriz real simétrica tridiagonal B tal que B tenga los mismos valores propios que A.

Engrape aquí
No doble

Álgebra Lineal Numérica.
Examen parcial III. Variante β.

Método de gradiente, método de gradiente conjugado, descomposición en valores singulares, cálculo de valores propios.

Nombre: Calificación:

Problema 1. *15 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el **método de gradiente**. Analice la complejidad de una iteración del algoritmo (cuente solamente las operaciones de multiplicación; suponga que el cálculo de la norma de un vector utiliza n multiplicaciones).

Problema 2. *15 %.*
De un sistema de ecuaciones lineales a la minimización de una forma cuadrática. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y estrictamente positiva definida, y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Definimos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x.$$

Denotemos por u al vector $A^{-1}b$. Enuncie y demuestre una fórmula que exprese la diferencia $f(x)-f(u)$ a través de la matriz A y la diferencia $x-u$. Además calcule el gradiente de la función f usando fórmulas conocidas para el gradiente de formas cuadráticas y lineales.

Problema 3. *15 %.*
Sea A una matriz real 3×2. Construya su **descomposición en valores singulares**, si están dados tres vectores w_1, w_2, w_3 que forman una base ortonormal del espacio $\mathbb{R}^3$ y tales que

$$AA^\top w_1 = 4w_1, \qquad AA^\top w_2 = 9w_2, \qquad AA^\top w_3 = 0_3.$$

Problema 4. *15 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y sea (U, S, V) una **descomposición en valores singulares** de la matriz A. Denotemos las columnas de U y V por u_j y v_j, respectivamente.

I. Muestre que A se puede escribir como una combinación lineal de productos diádicos de la forma $u_j v_j^*$.
II. Dado $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$, calcule Ax.
III. Demuestre que $\ker(A) = \ell(v_{r+1}, \ldots, v_n)$.

Problema 5. *15 %.*
Valores y vectores propios de una matriz real simétrica 2×2. En algún lenguaje de programación escriba una función de un argumento $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A^\top = A$, que calcule y regrese números $c, s, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ tales que $c^2 + s^2 = 1$ y

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{1,2} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}.$$