Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I.
Examen parcial II. Variante α.

Matrices ortogonales. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito 2	tareas individuales 2, 3	partici-pación 2	matrices especiales 2	parcial 2

El examen dura 100 minutos.

Problema 1. *20 %.*
Criterio algebraico de matrices ortogonales.
Complete el siguiente enunciado y demuestre las equivalencias (a)⇔(c) y (b)⇔(d).

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $A^\top A =$???

(b) $AA^\top =$???

(c) Las columnas de A ???

(d) Los renglones de A ???

Problema 2. *18 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -8 \\ 5 & 7 & 24 \\ -2 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 25 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *18 %.*
Propiedades de la reflexión ortogonal respecto a un hipersubespacio.

I. Sean $a, v \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0_2$, $v \notin \ell(a)$. Con un dibujo explique el sentido geométrico del vector $H_a v$ y deduzca una fórmula para calcular $H_a v$.

II. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$. Exprese la matriz H_a en términos de P_a, luego en términos de a. Calcule $H_a a$ y H_a^2.

III. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$, $\|a\|_2 = \|b\|_2 > 0$. Calcule $H_{a-b} a$.

Problema 4. *20 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que construya una descomposición QR de la matriz dada A, suponiendo que $A \in \mathcal{M}_{m\times 4}(\mathbb{R})$, $m \geqslant 4$, $r(A) = 4$. Utilice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Está prohibido usar ciclos. Se recomienda aplicar operaciones matriciales de nivel 2 (producto de matrices por vectores, operaciones lineales con matrices, producto diádico) o de nivel 1 (producto punto, axpy).

Problema 5. *10 %.*
Calcule el número de multiplicaciones en el algoritmo anterior. La respuesta es un polinomio en m. Hay que contrar las operaciones con entradas de matrices, incluso las operaciones escondidas dentro de las operaciones matriciales de nivel más alto. Por ejemplo, si $v \in \mathbb{R}^m$, entonces cuente `norm(v)` como m multiplicaciones.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I.
Examen parcial II. Variante β.

Matrices ortogonales. Descomposición QR.

Nombre:

Calificación (%):	examen escrito 2	tareas individuales 2, 3	partici-pación 2	matrices especiales 2	parcial 2

El examen dura 100 minutos.

Problema 1. *20 %.*
Criterio geométrico de matrices ortogonales.
Complete el siguiente enunciado y demuestre las implicaciones (b)⇒(a), (b)⇒(c) y (c)⇒(b).

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $A^\top A = ???$

(b) A preserva los productos internos, esto es, ???

(c) A preserva las normas, esto es, ???

(d) A preserva las distancias, esto es, ???

Problema 2. *18 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 17 \\ -5 & 7 & -9 \\ 2 & 0 & 12 \\ -2 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *18 %.*
Propiedades de la proyección ortogonal sobre la recta generada por un vector.

I. Sean $a, v \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0_n$. Demuestre que existe un único par de vectores $(u, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tal que $u \in \ell(a)$, $w \perp a$, $v = u + w$.

II. Sea $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$. Escriba la fórmula para la matriz P_a que realiza la proyección ortogonal sobre a. Deduzca fórmulas para P_a^2 y $P_a a$.

III. Sean $a, b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ tales que $a \perp b$. Simplifique las expresiones $P_a P_b$ y $(P_a + P_b)^2$.

Problema 4. *20 %.*
En algún lenguaje de programación escriba tres funciones:

I. La función `orthogonalreflexion` de dos argumentos $a \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$ que aplique la reflexión ortogonal H_a a cada columna de la matriz M y regrese la matriz formada de las columnas obtenidas. Se recomienda usar operaciones matriciales del lenguaje de programación elegido.

II. La función `householdervector` de un argumento $x \in \mathbb{R}^n$ que construya y devuelva un vector $a \in \mathbb{R}^n$ con la propiedad que $H_a x$ sea un múltiplo del vector básico e_1.

III. La función `qrhouseholder` que construya una descomposición QR de la matriz dada A, suponiendo que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $r(A) = n$, y utilizando **reflexiones de Householder** (las funciones `orthogonalreflexion` y `householdervector`).

Problema 5. *10 %.*
Calcule el número de multiplicaciones en cada una de las funciones del problema anterior. Las respuestas son polinomios en n. Hay que contrar las operaciones con entradas de matrices, incluso las operaciones escondidas dentro de las operaciones matriciales de nivel más alto. Por ejemplo, si $v \in \mathbb{R}^p$, entonces cuente `norm(v)` como p multiplicaciones.