Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I.
Examen parcial I. Variante α.

Multiplicación de matrices. Métodos directos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Nombre:	examen escrito	tarea individual	matrices especiales	parcial 1

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *16 %.*
Calcule la **factorización de Cholesky** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando la factorización de Cholesky y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 5 & -15 & 15 \\ 5 & 17 & 9 & 11 \\ -15 & 9 & 22 & -7 \\ 15 & 11 & -7 & 26 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Problema 2. *12 %.*
Producto de dos matrices de permutación. Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Demuestre que

$$P_\varphi P_\psi = P_{\psi\varphi}.$$

Problema 3. *22 %.*
Producto de dos matrices triangulares inferiores. Sean $A, B \in \operatorname{lt}_n(\mathbb{R})$.

I. Demuestre que $AB \in \operatorname{lt}_n(\mathbb{R})$.

II. En la suma que define la entrada $(AB)_{i,j}$ algunos sumandos se anulan. Explique por qué y escriba la suma que se queda.

III. En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto AB de dos matrices triangulares inferiores A y B del mismo tamaño n. Se recomienda utilizar el producto punto de renglones cortados de A por columnas cortadas de B.

IV. Calcule el número de flops que hace la función del inciso III.

Problema 4. *16 %.*

Teorema sobre las submatrices principales líderes del producto de una matriz triangular por una matriz general Sean A y B dos matrices de tamaño $n \times n$ y sea $m \in \{1, \ldots, n\}$. Supongamos que A es triangular inferior o B es triangular superior. En cada uno de estos dos casos demostrar que:

$$(AB)(1:m, 1:m) = A(1:m, 1:m)B(1:m, 1:m).$$

Aquí $A(1:m, 1:m)$ denota a la submatriz de la matriz A ubicada en la intersección de los primeros m renglones con las primeras m columnas.

Problema 5. *22 %.*

En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el algoritmo de **factorización LU**. El único argumento de esta función es una matriz cuadrada cuyo orden denotemos por n. Calcule el número de operaciones de multiplicación que se hacen en esta función (es un polinomio de n).

Problema 6. *16 %.*

Sea A una matriz cuadrada de orden n con entradas reales. Supongamos que A es invertible y posee una **factorización LU**. Demuestre que la factorización LU de la matriz A es **única**. Enuncie bien las propiedades de matrices triangulares superiores que se usan en la demostración.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I.
Examen parcial I. Variante β.

Multiplicación de matrices. Métodos directos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Nombre:	examen escrito	tarea individual	matrices especiales	parcial 1

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *16 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 10 & 14 & -10 & -6 \\ 8 & 8 & -12 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Problema 2. *12 %.*
Propiedad distributiva izquierda del producto de matrices. Enuncie bien y demuestre la propiedad: $A(B + C) = AB + AC$.

Problema 3. *22 %.*
Producto de dos matrices como una suma de productos diádicos. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$.

I. Represente AB como la suma de ciertos productos exteriores (columnas por renglones).

II. Muestre cómo funciona la fórmula del inciso I en el caso $m = 2$, $n = 3$, $p = 2$. Puede escribir matrices con entradas generales $A_{1,1}, \ldots, A_{2,3}$, $B_{1,1}, \ldots, B_{3,2}$ o un ejemplo numérico.

III. Escriba una demostración formal de la fórmula del inciso I.

IV. En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el producto de dos matrices A y B usando productos exteriores.

Problema 4. *16 %.*
Teorema sobre la inversa de una matriz triangular inferior. Sea A una matriz triangular inferior de orden n con entradas diagonales no nulas. Muestre que A^{-1} también es triangular inferior. Indicación: para $n = 4$ encontrar una cadena de operaciones elementales que transforman A en I_n, luego expresar A^{-1} como un producto de ciertas matrices elementales y analizar su forma.

Problema 5. *22 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que calcule el **factor triangular inferior de Cholesky** de una matriz dada. Suponer que dicha factorización existe, denotar el orden de la matriz dada por n. Calcule el número de operaciones de multiplicación (es un polinomio de n).

Problema 6. *16 %.*
Sea A una matriz real cuadrada de orden n que es invertible y tiene una **factorización de Cholesky** $A = LL^\top$. Demuestre que:

I. A es simétrica.

II. Para cada $m \in \{1, \ldots, n\}$, el menor principal líder de orden m de la matriz A es estrictamente positivo:
$$\det A(1 : m, 1 : m) > 0.$$