Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I.
Examen a Título de Suficiencia. Variante α.

Operaciones con matrices, matrices triangulares, descomposiciones LU y PLU, matrices ortogonales, descomposición QR, métodos iterativos.

Nombre:

Problema 1. *22 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el algoritmo de **factorización LU**. El único argumento de esta función es una matriz cuadrada cuyo orden denotemos por n. Calcule el número de operaciones de multiplicación que se hacen en esta función (es un polinomio de n).

Problema 2. *18 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -8 \\ 5 & 7 & 24 \\ -2 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 25 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *22 %.*
Criterio algebraico de matrices ortogonales.
Complete el siguiente enunciado y demuestre las equivalencias (a)$\Leftrightarrow$(c) y (b)$\Leftrightarrow$(d).

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $A^\top A =$???

(b) $AA^\top =$???

(c) Las columnas de A ???

(d) Los renglones de A ???

Problema 4. *20 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva el sistema de ecuaciones $Ax = b$ usando el **método de Jacobi**. Se puede trabajar con coordenadas o usar operaciones matriciales. Calcule el número de flops que se usan en cada iteración del método para construir el vector nuevo a partir del vector previo. Es suficiente contar las operaciones de multiplicación.

Problema 5. *18 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$, y comprobar que $x^{(2)}$ es la solución exacta del sistema. Escribir fórmulas para todos los cálculos intermedios.

Problema 6. *20 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y estrictamente positiva definida, y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Definimos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$. Denotemos por u al vector $A^{-1}b$. Enuncie y demuestre una fórmula que exprese la diferencia $f(x) - f(u)$ a través de la matriz A y la diferencia $x - u$. Además calcule el gradiente de la función f usando fórmulas conocidas para el gradiente de formas cuadráticas y lineales.

Análisis Numérico I.
Examen a Título de Suficiencia. Variante β.

Operaciones con matrices, matrices triangulares, descomposiciones LU y PLU, matrices ortogonales, descomposición QR, métodos iterativos.

Nombre:

Problema 1. *22 %.*
Teorema sobre las submatrices principales líderes del producto de una matriz triangular por una matriz general Sean A y B dos matrices de tamaño $n \times n$ y sea $m \in \{1, \ldots, n\}$. Supongamos que A es triangular inferior o B es triangular superior. En cada uno de estos dos casos demostrar que:

$$(AB)(1:m, 1:m) = A(1:m, 1:m)B(1:m, 1:m).$$

Aquí $A(1:m, 1:m)$ denota a la submatriz de la matriz A ubicada en la intersección de los primeros m renglones con las primeras m columnas.

Problema 2. *18 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 17 \\ -5 & 7 & -9 \\ 2 & 0 & 12 \\ -2 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *22 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que construya una descomposición QR de la matriz dada A, suponiendo que $A \in \mathcal{M}_{m\times 4}(\mathbb{R})$, $m \geqslant 4$, $\mathrm{r}(A) = 4$. Utilice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Está prohibido usar ciclos. Se recomienda aplicar operaciones matriciales de nivel 2 (producto de matrices por vectores, operaciones lineales con matrices, producto diádico) o de nivel 1 (producto punto, axpy).

Problema 4. *20 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz estrictamente diagonal dominante por renglones y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que el **método de Jacobi**, aplicado al sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, converge.

Problema 5. *18 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$, y comprobar que $x^{(2)}$ es la solución exacta del sistema. Escribir fórmulas para todos los cálculos intermedios.

Problema 6. *20 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y estrictamente positiva definida, y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Definimos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$. Sean $v \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$. Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(\alpha) = f(v + \alpha p)$. Calcule el punto mínimo α_0 de la función g. Demuestre que $p \perp (b - Aw)$, donde $w = v + \alpha_0 p$.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I.
Examen a Título de Suficiencia. Variante 7414.

Operaciones con matrices, matrices triangulares, descomposiciones LU y PLU, matrices ortogonales, descomposición QR, métodos iterativos.

Nombre:

Problema 1. *22 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que realice el algoritmo de **factorización LU**. El único argumento de esta función es una matriz cuadrada cuyo orden denotemos por n. Calcule el número de operaciones de multiplicación que se hacen en esta función (es un polinomio de n).

Problema 2. *18 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 14 \\ 1 & -3 & -12 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *22 %.*
Criterio geométrico de matrices ortogonales.
Complete el siguiente enunciado y demuestre las implicaciones (b)⇒(a), (b)⇒(c) y (c)⇒(b).

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $A^\top A =$???
(b) A preserva los productos internos, esto es, ???
(c) A preserva las normas, esto es, ???
(d) A preserva las distancias, esto es, ???

Problema 4. *20 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que resuelva el sistema de ecuaciones $Ax = b$ usando el **método de Gauss–Seidel**. Se puede trabajar con coordenadas o usar operaciones matriciales. Calcule el número de flops que se usan en cada iteración del método para construir el vector nuevo a partir del vector previo. Es suficiente contar las operaciones de multiplicación.

Problema 5. *18 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$, y comprobar que $x^{(2)}$ es la solución exacta del sistema. Escribir fórmulas para todos los cálculos intermedios.

Problema 6. *20 %.*
De un sistema de ecuaciones lineales a la minimización de una función cuadrática. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y estrictamente positiva definida, y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Definimos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x$. Denotemos por u al vector $A^{-1}b$. Enuncie y demuestre una fórmula que exprese la diferencia $f(x) - f(u)$ a través de la matriz A y la diferencia $x - u$. Además calcule el gradiente de la función f usando fórmulas conocidas para el gradiente de formas cuadráticas y lineales.

Engrape aquí
No doble

Análisis Numérico I.
Examen a Título de Suficiencia. Variante 7143.

Operaciones con matrices, matrices triangulares, descomposiciones LU y PLU, matrices ortogonales, descomposición QR, métodos iterativos.

Nombre:

Problema 1. *22 %.*
Teorema sobre las inversas de las matrices triangulares inferiores. Sea A una matriz triangular inferior de orden n con entradas diagonales no nulas. Muestre que A^{-1} también es triangular inferior. No está permitido pasar a matrices triangulares superiores.

Problema 2. *18 %.*
Construya una factorización QR de la matriz dada A usando el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Haga las comprobaciones: $Q^\top Q = I_3$, $QR = A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -22 \\ -4 & -5 & 8 \\ -4 & 0 & 20 \\ 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Problema 3. *22 %.*
En algún lenguaje de programación escriba una función que construya una descomposición QR de la matriz dada A, suponiendo que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{r}(A) = n$. Utilice el **algoritmo modificado de Gram–Schmidt**. Se recomienda aplicar operaciones matriciales de nivel 2 (producto de matrices por vectores, operaciones lineales con matrices, producto diádico) o de nivel 1 (producto punto, axpy).

Problema 4. *20 %.*
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz estrictamente diagonal dominante por columnas y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que el **método de Jacobi**, aplicado al sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, converge.

Problema 5. *18 %.*
Haga dos iteraciones del **método de gradiente conjugado** para el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hay que calcular los vectores $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$, empezando con $x^{(0)} = 0$, y comprobar que $x^{(2)}$ es la solución exacta del sistema. Escribir fórmulas para todos los cálculos intermedios.

Problema 6. *20 %.*

Minimización de una función cuadrática sobre una recta. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y estrictamente positiva definida, y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Definimos $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \frac{1}{2}x^\top A x - b^\top x$. Sean $v \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$. Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(\alpha) = f(v + \alpha p)$. Calcule el punto mínimo α_0 de la función g. Demuestre que $p \perp (b - Aw)$, donde $w = v + \alpha_0 p$.