Ajuste de curvas por polinomios y por polinomios trigonométricos (un tema del curso "Álgebra Lineal Numérica")

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

18 de mayo de 2021

Objetivo:

mostrar que el problema de ajuste de curvas se reduce al problema de mínimos cuadrados.

Prerrequisitos:

- problema de mínimos cuadrados;
- matriz de Vandermonde;
- matriz de valores de monomios trigonométricos;

Plan

La matriz de Vandermonde (repaso)

Sea $x = [x_1, \ldots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ y sea $m \in \mathbb{N}$.

$$V_m(x) := \left[x_j^{k-1}\right]_{j,k=1}^{n,m}.$$

Ejemplo ($n = 4,\ m = 3$):

$$V_3(x) = \begin{bmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 \\ x_3^0 & x_3^1 & x_3^2 \\ x_4^0 & x_4^1 & x_4^2 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz también se conoce como la matriz de valores de monomios algebraicos.

Construcción de la matriz $V_m(x)$

En temas anteriores hemos programado una función que construye la matriz $V_m(x)$.

```
def alg_mon_values(x, m):
    ???
    return V
```

El polinomio con coeficientes dados

Sea $c \in \mathbb{R}^m$. Denotemos por P_c la función polinomial con coeficientes $c_1, \ldots, c_m$:

$$P_c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad P_c(t) := \sum_{k=1}^{m} c_k t^{k-1}.$$

Por ejemplo, si $m = 3$,

$$P_c(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2.$$

El polinomio con coeficientes dados

Sea $c \in \mathbb{R}^m$. Denotemos por P_c la función polinomial con coeficientes $c_1, \ldots, c_m$:

$$P_c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad P_c(t) := \sum_{k=1}^{m} c_k t^{k-1}.$$

Por ejemplo, si $m = 3$,

$$P_c(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2.$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces denotamos por $P_c(x)$ el vector $[P_c(x_j)]_{j=1}^{n}$.

Los valores de un polinomio en términos de la matriz de Vandermonde

Sea $c \in \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}^4$. Entonces

$$P_c(x) =$$

Los valores de un polinomio en términos de la matriz de Vandermonde

Sea $c \in \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}^4$. Entonces

$$P_c(x) = \begin{bmatrix} P_c(x_1) \\ P_c(x_2) \\ P_c(x_3) \\ P_c(x_4) \end{bmatrix} =$$

Los valores de un polinomio en términos de la matriz de Vandermonde

Sea $c \in \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}^4$. Entonces

$$P_c(x) = \begin{bmatrix} P_c(x_1) \\ P_c(x_2) \\ P_c(x_3) \\ P_c(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 x_1 + c_3 x_1^2 \\ c_1 + c_2 x_2 + c_3 x_2^2 \\ c_1 + c_2 x_3 + c_3 x_3^2 \\ c_1 + c_2 x_4 + c_3 x_4^2 \end{bmatrix} =$$

Los valores de un polinomio en términos de la matriz de Vandermonde

Sea $c \in \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}^4$. Entonces

$$P_c(x) = \begin{bmatrix} P_c(x_1) \\ P_c(x_2) \\ P_c(x_3) \\ P_c(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2x_1 + c_3x_1^2 \\ c_1 + c_2x_2 + c_3x_2^2 \\ c_1 + c_2x_3 + c_3x_3^2 \\ c_1 + c_2x_4 + c_3x_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} =$$

Los valores de un polinomio en términos de la matriz de Vandermonde

Sea $c \in \mathbb{R}^3$, $x \in \mathbb{R}^4$. Entonces

$$P_c(x) = \begin{bmatrix} P_c(x_1) \\ P_c(x_2) \\ P_c(x_3) \\ P_c(x_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 x_1 + c_3 x_1^2 \\ c_1 + c_2 x_2 + c_3 x_2^2 \\ c_1 + c_2 x_3 + c_3 x_3^2 \\ c_1 + c_2 x_4 + c_3 x_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = V_3(x)c.$$

Los valores de un polinomio en términos de la matriz de Vandermonde

Proposición

Sea $c \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$P_c(x) = V_m(x)c.$$

Los valores de un polinomio en términos de la matriz de Vandermonde

Proposición

Sea $c \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$P_c(x) = V_m(x)c.$$

Demostración.

Los valores de un polinomio en términos de la matriz de Vandermonde

Proposición

Sea $c \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$P_c(x) = V_m(x)c.$$

Demostración.

Ambos lados de la igualdad son elementos de

Los valores de un polinomio en términos de la matriz de Vandermonde

Proposición

Sea $c \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$P_c(x) = V_m(x)c.$$

Demostración.

Ambos lados de la igualdad son elementos de $\mathbb{R}^n$.

Los valores de un polinomio en términos de la matriz de Vandermonde

Proposición

Sea $c \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$P_c(x) = V_m(x)c.$$

Demostración.

Ambos lados de la igualdad son elementos de $\mathbb{R}^n$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$,

$$P_c(x)_j =$$

Los valores de un polinomio en términos de la matriz de Vandermonde

Proposición

Sea $c \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$P_c(x) = V_m(x)c.$$

Demostración.

Ambos lados de la igualdad son elementos de $\mathbb{R}^n$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$,

$$P_c(x)_j = P_c(x_j) =$$

Los valores de un polinomio en términos de la matriz de Vandermonde

Proposición

Sea $c \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$P_c(x) = V_m(x)c.$$

Demostración.

Ambos lados de la igualdad son elementos de $\mathbb{R}^n$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$,

$$P_c(x)_j = P_c(x_j) = \sum_{k=1}^{m} c_k x_j^{k-1} =$$

Los valores de un polinomio en términos de la matriz de Vandermonde

Proposición

Sea $c \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$P_c(x) = V_m(x)c.$$

Demostración.

Ambos lados de la igualdad son elementos de $\mathbb{R}^n$.

Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$,

$$P_c(x)_j = P_c(x_j) = \sum_{k=1}^{m} c_k x_j^{k-1} = \sum_{k=1}^{m} (V_m(x))_{j,k} c_k = (V_m(x)c)_j.$$

El determinante de Vandermonde (repaso)

Proposición

Sea $x \in \mathbb{R}^n$*. Entonces*

$$\det(V_n(x)) =$$

El determinante de Vandermonde (repaso)

Proposición

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$\det(V_n(x)) = \prod_{1 \le j < k \le n} (x_k - x_j).$$

El determinante de Vandermonde (repaso)

Proposición

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces*

$$\det(V_n(x)) = \prod_{1 \le j < k \le n} (x_k - x_j).$$

Ejercicio. Demostrar esta fórmula por inducción sobre n.

El determinante de Vandermonde (repaso)

Proposición

Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\det(V_n(x)) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j).$$

Ejercicio. Demostrar esta fórmula por inducción sobre n.

Corolario

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que los números $x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares.

Entonces la matriz $V_n(x)$ es invertible.

El rango de la matriz de Vandermonde (repaso)

Proposición

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ *tal que los números* $x_1, \ldots, x_n$ *son diferentes a pares. Sea* $m \in \mathbb{N}$ *tal que* $m \leq n$*. Entonces las columnas de la matriz* $V_m(x)$ *son linealmente independientes, esto es,*

$$\mathrm{r}(V_m(x)) = m.$$

Demostración.

El rango de la matriz de Vandermonde (repaso)

Proposición

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que los números $x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq n$. Entonces las columnas de la matriz $V_m(x)$ son linealmente independientes, esto es,

$$\mathrm{r}(V_m(x)) = m.$$

Demostración.

Las columnas de $V_m(x)$ son las primeras m columnas de $V_n(x)$.

La matriz $V_n(x)$ es invertible, por eso sus columnas son linealmente independientes.

En particular, las primeras m columnas de $V_n(x)$ son linelmente independientes.

La matriz de monomios trigonométricos (repaso)

Sea $x = [x_1, \ldots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ y sea $m \in \mathbb{N}$. Definimos $W_m(x) \in \mathbb{R}^{n\times(2m+1)}$,

$$W_m(x)_{j,k} = \begin{cases} 1, & k = 1; \\ \cos((k-1)x_j), & 2 \le k \le m+1; \\ \operatorname{sen}((k-m-1)x_j), & m+2 \le k \le 2m+1. \end{cases}$$

Ejemplo ($n = 4,\ m = 3$):

$$W_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(x_1) & \cos(2x_1) & \cos(3x_1) & \operatorname{sen}(x_1) & \operatorname{sen}(2x_1) & \operatorname{sen}(3x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & \cos(2x_2) & \cos(3x_2) & \operatorname{sen}(x_2) & \operatorname{sen}(2x_2) & \operatorname{sen}(3x_2) \\ 1 & \cos(x_3) & \cos(2x_3) & \cos(3x_3) & \operatorname{sen}(x_3) & \operatorname{sen}(2x_3) & \operatorname{sen}(3x_3) \\ 1 & \cos(x_4) & \cos(2x_4) & \cos(3x_4) & \operatorname{sen}(x_4) & \operatorname{sen}(2x_4) & \operatorname{sen}(3x_4) \end{bmatrix}.$$

Construcción de la matriz $W_m(x)$

En temas anteriores hemos programado una función que construye la matriz $W_m(x)$.

```
def trig_mon_values(x, m):
    ???
    return W
```

El rango de la matriz $W_m(x)$

Problema. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $n = 2m + 1$, y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Calcular

$$\det(V_m(x)).$$

El rango de la matriz $W_m(x)$

Problema. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $n = 2m + 1$, y sea $x \in \mathbb{R}^n$. Calcular

$$\det(V_m(x)).$$

Ejercicio. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y sea $m \in \mathbb{N}$. Supongamos que $n \geq 2m + 1$. Demostrar que

$$\mathrm{r}(W_m(x)) = 2m + 1,$$

esto es, las columnas de $W_m(x)$ son linealmente independientes.

El polinomio trigonométrico con coeficientes dados

Sea $d \in \mathbb{R}^{2m+1}$. Definimos $T_d \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_d(t) := d_1 + \sum_{k=1}^{m} d_{k+1} \cos(kt) + \sum_{k=1}^{m} d_{k+m+1} \operatorname{sen}(kt).$$

Ejercicio. Sean $x \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^{2m+1}$. Demostrar que

$$T_d(x) = W_m(x) d.$$

Solución del problema de mínimos cuadrados (repaso)

Proposición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *tal que* $\mathrm{r}(A) = m$ *y sea* $b \in \mathbb{R}^n$*.*

Entonces existe un punto s *en* $\mathbb{R}^m$ *tal que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \setminus \{s\} \qquad \|Ax - b\| > \|As - b\|.$$

Más aún, si (Q, R) *es una factorización QR delgada de* A*, entonces* s *se puede calcular como*

$$s = R^{-1} Q Q^\top b.$$

Solución del problema de mínimos cuadrados (repaso)

En temas anteriores hemos programado una función
que resuelve el problema de mínimos cuadrados.

```
def least_squares(A, b):
    (Q, R) = my_favorite_qr_thin_algorithm(A)
    ???
    s = solve_ut(???, ???)
    return s
```

Plan

El problema del ajuste polinomial

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares.

Sea $m \leq n$. Definimos $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$f(c) := \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} c_k x_j^{k-1} - y_j \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Encontrar el punto mínimo de la función f.

El problema del ajuste polinomial

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares.

Sea $m \leq n$. Definimos $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$f(c) \coloneqq \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} c_k x_j^{k-1} - y_j \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Encontrar el punto mínimo de la función f.

Solución. En la notación concisa que introdujimos antes,

$$f(c) =$$

El problema del ajuste polinomial

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares.

Sea $m \le n$. Definimos $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$f(c) := \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} c_k x_j^{k-1} - y_j \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Encontrar el punto mínimo de la función f.

Solución. En la notación concisa que introdujimos antes,

$$f(c) = \|P_c(x) - y\| =$$

El problema del ajuste polinomial

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares.

Sea $m \leq n$. Definimos $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$f(c) := \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} c_k x_j^{k-1} - y_j \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Encontrar el punto mínimo de la función f.

Solución. En la notación concisa que introdujimos antes,

$$f(c) = \|P_c(x) - y\| = \|V_m(x)c - y\|.$$

Hemos reducido el problema al problema de mínimos cuadrados.

Programación: solución del problema del ajuste polinomial

```
def alg_pol_fit(x, y, m):
    V = alg_mon_values(x, m)
    c = least_squares(???, ???)
    return c
```

El problema del ajuste trigonométrico

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2m + 1$. Definimos $g \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$g(d) := \left(\sum_{j=1}^{n} \left(d_1 + \sum_{k=1}^{m} d_{k+1} \cos(k x_j) + \sum_{k=1}^{m} d_{k+m+1} \operatorname{sen}(k x_j) - y_j \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Encontrar el punto mínimo de la función g.

El problema del ajuste trigonométrico

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2m+1$. Definimos $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$g(d) := \left(\sum_{j=1}^{n} \left(d_1 + \sum_{k=1}^{m} d_{k+1} \cos(kx_j) + \sum_{k=1}^{m} d_{k+m+1} \operatorname{sen}(kx_j) - y_j \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Encontrar el punto mínimo de la función g.

Solución. En la notación concisa que introdujimos antes,

$$g(d) =$$

El problema del ajuste trigonométrico

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares.
Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2m + 1$. Definimos $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$g(d) := \left(\sum_{j=1}^{n} \left(d_1 + \sum_{k=1}^{m} d_{k+1} \cos(kx_j) + \sum_{k=1}^{m} d_{k+m+1} \operatorname{sen}(kx_j) - y_j \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Encontrar el punto mínimo de la función g.

Solución. En la notación concisa que introdujimos antes,

$$g(d) = \| T_d(x) - y \| =$$

El problema del ajuste trigonométrico

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_1, \ldots, x_n$ son diferentes a pares.

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2m + 1$. Definimos $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$g(d) := \left(\sum_{j=1}^{n} \left(d_1 + \sum_{k=1}^{m} d_{k+1} \cos(kx_j) + \sum_{k=1}^{m} d_{k+m+1} \operatorname{sen}(kx_j) - y_j \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Encontrar el punto mínimo de la función g.

Solución. En la notación concisa que introdujimos antes,

$$g(d) = \| T_d(x) - y \| = \| W_m(x) d - y \|.$$

Hemos reducido el problema al problema de mínimos cuadrados.

Programación: solución del problema del ajuste trigonométrico

```
def trig_pol_fit(x, y, m):
    W = trig_mon_values(x, m)
    d = least_squares(???, ???)
    return d
```