Criterios de matrices reales ortogonales, en términos de sus renglones y columnas (un tema del curso “Álgebra Lineal Numérica”)

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

16 de abril de 2021

Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que A es ortogonal, si

$$A^\top A = I_n \qquad \text{y} \qquad AA^\top = I_n.$$

La invertibilidad por izquierda y por derecha de matrices cuadradas (repaso)

Proposición

Sean $A, P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *tales que*

$$PA = I_n \qquad y \qquad AQ = I_n.$$

Entonces $P = Q$.

Ejemplo de operadores en un espacio de dimensión infinita, cuando la invertibilidad por la izq. y por la der. no son equivalentes

En el espacio de sucesiones cuadrado integrables $\ell^2(\mathbb{N})$ consideremos los operadores

$$L\colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \ldots), \qquad R\colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Entonces para cada x en $\ell^2(\mathbb{N})$,

$$LRx =$$

Ejemplo de operadores en un espacio de dimensión infinita, cuando la invertibilidad por la izq. y por la der. no son equivalentes

En el espacio de sucesiones cuadrado integrables $\ell^2(\mathbb{N})$ consideremos los operadores

$$L\colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \ldots), \qquad R\colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Entonces para cada x en $\ell^2(\mathbb{N})$,

$$LRx = x, \qquad RLx =$$

Ejemplo de operadores en un espacio de dimensión infinita, cuando la invertibilidad por la izq. y por la der. no son equivalentes

En el espacio de sucesiones cuadrado integrables $\ell^2(\mathbb{N})$ consideremos los operadores

$$L\colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \ldots), \qquad R\colon (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Entonces para cada x en $\ell^2(\mathbb{N})$,

$$LRx = x, \qquad RLx = (0, x_2, x_3, \ldots).$$

Por lo tanto, $LR = I$, pero $RL \neq I$.

La invertibilidad por izquierda y por derecha de matrices cuadradas (repaso)

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *existe P en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $PA = I_n$;*

(b) *existe Q en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $AQ = I_n$;*

(c) *existe R en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $RA = I_n$ y $AR = I_n$.*

La invertibilidad por izquierda y por derecha de matrices cuadradas (repaso)

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) *existe P en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $PA = I_n$;*

(b) *existe Q en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $AQ = I_n$;*

(c) *existe R en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $RA = I_n$ y $AR = I_n$.*

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces

$$AB = I_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad BA = I_n.$$

Matrices ortogonales

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. Entonces*

$$A^\top A = I_n \iff AA^\top = I_n.$$

Matrices ortogonales

Matrices ortogonales

Definición

Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que Q es ortogonal si

$$Q^\top Q = I_n.$$

Matrices ortogonales

Definición

Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que Q es ortogonal si

$$Q^\top Q = I_n.$$

Algunos autores prefieren incluir en la definición las dos igualdades:

$$Q^\top Q = I_n, \qquad QQ^\top = I_n.$$

El grupo de matrices reales ortogonales de orden n

Definición

Denotamos por $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las matrices reales ortogonales de orden n:

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) := \left\{ Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \quad Q^\top Q = I_n \right\}.$$

El grupo de matrices reales ortogonales de orden n

Definición

Denotamos por $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las matrices reales ortogonales de orden n:

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) := \left\{ Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \quad Q^\top Q = I_n \right\}.$$

Ejercicio. Mostrar que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ es un grupo.

El producto interno de dos columnas de dos matrices

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Entonces*

$$(A^\top B)_{r,s} = \langle A_{*,r}, B_{*,s} \rangle.$$

El producto interno de dos columnas de dos matrices

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Entonces*

$$(A^\top B)_{r,s} = \langle A_{*,r}, B_{*,s} \rangle.$$

Demostración.

$$(A^\top B)_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} (A^\top)_{r,k} B_{k,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,r} B_{k,s},$$

$$\langle A_{*,r}, B_{*,s} \rangle = \sum_{k=1}^{n} (A_{*,r})_k (B_{*,s})_k = \sum_{k=1}^{n} A_{k,r} B_{k,s}.$$

$\square$

El producto interno de dos renglones de dos matrices

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Entonces*

$$(AB^\top)_{r,s} = \langle A_{r,*}, B_{s,*} \rangle.$$

El producto interno de dos renglones de dos matrices

Proposición

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Entonces*

$$(AB^\top)_{r,s} = \langle A_{r,*}, B_{s,*} \rangle.$$

Demostración: ejercicio.

Criterio de matrices ortogonales en términos de renglones y columnas

Proposición

Sea $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $Q^\top Q = I_n$;

(b) $QQ^\top = I_n$;

(c) *las columnas de Q forman una lista ortonormal en $\mathbb{R}^n$;*

(d) *los renglones de Q forman una lista ortonormal en $\mathbb{R}^n$.*

Lista de columnas versus conjunto de columnas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lista de columnas versus conjunto de columnas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El conjunto de las columnas de A consiste de dos vectores:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad = \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

El conjunto de las columnas de A es un conjunto ortonormal, pero la matriz A no es ortogonal.

Ejemplos de matrices ortogonales de orden 2: rotaciones

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Ejemplos de matrices ortogonales: rotaciones en dos coordenadas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 & 0 & -\operatorname{sen}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}(\alpha) & 0 & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejemplos de matrices ortogonales:

matrices diagonales con elementos 1 y -1 en la diagonal principal

$$\operatorname{diag}(1,-1,-1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Otros ejemplos de matrices ortogonales

- Matrices de permutación.
- Reflexiones ortogonales respecto hiperplanos.
- Matrices de vectores propios de matrices reales simétricas.