Descomposición en valores singulares: definición y algunas propiedades elementales

Objetivos. Conocer la definición de la descomposición en valores singulares.

1. Definición (diagonal principal de una matriz rectangular). Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Entonces la *diagonal principal* de la matriz A está formada por las entradas $A_{i,i}$ con $i \in \{1, \ldots, \min\{m, n\}\}$.

2. Definición (matriz rectangular diagonal). Una matriz $D \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se llama *rectangular diagonal* si todas sus entradas fuera de la diagonal principal son cero:

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad \Big(i \neq j \qquad \Longrightarrow \qquad D_{i,j} = 0\Big).$$

3. Definición (descomposición en valores singulares). Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Una terna ordenada (U, Σ, V) se llama *descomposición en valores singulares* de la matriz A si

$$A = U\Sigma V^\top,$$

$U \in O(m, \mathbb{R})$, $V \in O(n, \mathbb{R})$, y $\Sigma \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz rectangular diagonal de rango $r \leq \min\{m, n\}$, cuyas entradas diagonales no nulas $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ son positivas y forman una secuencia decreciente:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r.$$

En esta situación las columnas de U se llaman *vectores singulares izquierdos*, las columnas de V se llaman *vectores singulares derechos*, y los números $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ se llaman *valores singulares* de A. A veces se definen también $\sigma_i = 0$ para todo $i > r$.

4. Por ejemplo, si $m = 4$, $n = 5$, $r = 3$, entonces

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Teorema (existencia de una descomposición en valores singulares). Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ posée una descomposición en valores singulares.

6. Los valores singulares se determinan de manera única (sin demostración). Se puede demostrar que las entradas diagonales de Σ se determinan de manera única.

7. La descomposición en valores singulares no es única. Por ejemplo, si $A = I_n$, entonces para toda matriz ortogonal $V \in O(n, \mathbb{R})$ tenemos

$$I_n = V I_n V^\top.$$

8. La descomposición en valores singulares de la matriz transpuesta. Si (U, Σ, V) es una descomposición en valores singulares de A, entonces $(V, \Sigma^\top, U)$ es una descomposición en valores singulares de $A^\top$.

9. Forma geométrica de la descomposición en valores singulares. Sea (U, Σ, V) Denotemos por $u_1, \ldots, u_m$ a las columnas de U y por $v_1, \ldots, v_n$ a las columnas de V. Entonces

$$Av_j = \begin{cases} \sigma_j u_j, & j \in \{1, \ldots, r\}, \\ \mathbf{0}_m, & j \in \{r+1, \ldots, n\}; \end{cases} \qquad Au_j = \begin{cases} \sigma_j v_j, & j \in \{1, \ldots, r\}, \\ \mathbf{0}_n, & j \in \{r+1, \ldots, m\}. \end{cases}$$

10. Bases de la imagen y del núcleo de las matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}^\top$ en términos de los vectores singulares izquierdos y derechos.

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(A) &= \ell(u_1, \ldots, u_r), & \operatorname{im}(A^\top) &= \ell(v_1, \ldots, v_r), \\ \ker(A) &= \ell(v_{r+1}, \ldots, v_n), & \ker(A^\top) &= \ell(u_{r+1}, \ldots, u_m). \end{aligned}$$

11. Corolario. Del resultado anterior sigue directamente que

$$\operatorname{im}(A)^\perp = \ker(A^\top), \qquad \dim(\operatorname{im}(A)) + \dim(\ker(A)) = n.$$

Por supuesto, estos resultados se pueden obtener con métodos más simples.

12. Descomposición de una matriz en una suma de productos exteriores de sus vectores singulares.

$$A = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j u_j v_j^\top.$$

13. La norma de una matriz inducida por la norma euclidiana de vectores es igual al valor singular máximo. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Entonces

$$\|A\|_2 = \sigma_1.$$

14. Lema: la norma de Frobenius de una matriz rectangular diagonal es igual a la norma euclidiana del vector de sus entradas diagonales. Sea $D \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ una matriz rectangular diagonal. Entonces

$$\|D\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{\min\{m,n\}} D_{j,j}^2}.$$

15. Lema: la norma de Frobenius de una matriz no se cambia al multiplicar por matrices ortogonales del lado izquierdo o derecho. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ y sean $U \in O(m, \mathbb{R})$, $V \in O(n, \mathbb{R})$. Entonces

$$\|UA\|_F = \|A\|_F, \qquad \|AV\|_F = \|A\|_F.$$

16. Proposición: la norma de Frobenius de una matriz es igual a la norma euclidiana del vector de sus valores singulares.

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{r} \sigma_j^2}.$$

17. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz invertible, entonces

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}, \qquad \varkappa_2(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}.$$

18. Ejemplos (robados del libro de Watkins).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}.$$