Métodos iterativos de Jacobi y de Gauss–Seidel en la forma matricial

Objetivos. Escribir los métodos iterativos de Jacobi y de Gauss–Seidel en la forma matricial y demostrar que estos métodos convergen, si la matriz del sistema es estrictamente diagonal dominante.

1. Método de Jacobi en forma matricial. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz con entradas diagonales no nulas:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad A_{j,j} \neq 0.$$

Escribimos A en la forma

$$A = D + C,$$

donde

$$d = \left[A_{j,j}\right]_{j=1}^{n}, \qquad D = \operatorname{diag}(d) = \operatorname{diag}(A_{1,1}, \ldots, A_{n,n}), \qquad C = A - D.$$

Si $b \in \mathbb{R}^n$, entonces la igualdad $Ax = b$ se puede escribir en la forma

$$Dx = b - Cx.$$

La fórmula iterativa es

$$x^{(s)} = D^{-1}(b - Cx^{(s-1)}). \tag{1}$$

Como D es una matriz diagonal, el producto $D^{-1}(b - Cx)$ se calcula rápidamente usando la división por componentes:

$$x = (b - Cx) \oslash d.$$

2. Modificación del residuo al modificar el vector. La expresión $b - Ax$ se llama el *residuo* del problema. La denotamos por r. Si pasamos del vector x a otro vector $y = x + p$, entonces el residuo nuevo se puede expresar a través del residuo anterior de la siguiente manera:

$$b - Ay = b - A(x + p) = (b - Ax) - Ap. \tag{2}$$

3. Método de Jacobi en forma matricial, para programar. La fórmula (1) es cómoda para analizar la convergencia del algoritmo. Ahora vamos a deducir otra fórmula equivalente que será más cómoda para programación. En la ecuación

$$Ax = b$$

pasamos Ax al lado derecho (con otro signo):

$$\mathbf{0}_n = b - Ax.$$

Multiplicamos ambos lados por D^{-1} del lado izquierdo:

$$\mathbf{0}_n = D^{-1}(b - Ax).$$

Sumamos x a ambos lados:

$$x = x + D^{-1}(b - Ax).$$

Notemos que $b - Ax$ es el residuo correspondiente al vector x. Convertimos la fórmula anterior en una fórmula recursiva para calcular vectores $x^{(s)}$:

$$x^{(s+1)} = x^{(s)} + D^{-1} r^{(s)}. \tag{3}$$

Al modificar el vector, se modifica también el residuo, según la regla (2):

$$r^{(s+1)} = r^{(s)} - A(D^{-1} r^{(s)}). \tag{4}$$

Estas fórmulas se pueden escribir en MATLAB de la siguiente manera (guardamos x y r nuevos en las mismas variables que x y r anteriores):

```
p = r ./ d;
q = A * p;
x = x + p;
r = r - q;
```

Comparando con (1), la ventaja de las fórmulas nuevas es que ahora utilizamos solamente la multiplicación de la matriz A por un vector y algunas operaciones de complejidad $O(n)$: operaciones lineales con vectores y la división componente a componente. No construimos ninguna matriz diferente de la matriz original.

4. Convergencia del método de Jacobi para matrices estrictamente diagonal dominantes por renglones. Supongamos que A es estrictamente diagonal dominante por renglones. Entonces para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\sum_{k=1}^{n} |(D^{-1}C)_{j,k}| = \frac{1}{|A_{j,j}|} \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} |A_{j,k}| < 1,$$

y la norma $\|\cdot\|_\infty$ de la matriz $D^{-1}C$ es estrictamente menor que 1:

$$L \coloneqq \|D^{-1}C\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} \sum_{k=1}^{n} |(D^{-1}C)_{j,k}| < 1.$$

Por lo tanto, la función $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = D^{-1}(b - Cx),$$

es contractiva en el espacio $\mathbb{R}^n$ considerado con la norma $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty = \|D^{-1}C(y - x)\|_\infty \le \|D^{-1}C\|_\infty \, \|y - x\|_\infty \le L \, \|x - y\|_\infty.$$

Con esto se garantiza la convergencia del método del punto fijo.

5. Método de Gauss-Seidel en la forma matricial. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz con entradas diagonales no nulas. Escribimos A en la forma

$$A = L + U,$$

donde L es triangular inferior y U es estrictamente triangular superior. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & 0 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & A_{1,2} & A_{1,3} \\ 0 & 0 & A_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Dado un vector $b \in \mathbb{R}^n$, la ecuación $Ax = b$ es equivalente a

$$x = L^{-1}(b - Ux),$$

y la fórmula iterativa es

$$x^{(s+1)} = L^{-1}(b - Ux^{(s)}).$$

Notemos que la matriz L es triangular inferior, y en vez de calcular su inversa se resuelve un sistema de ecuaciones con el método de la sustitución hacia adelante.

6. Método de Gauss-Seidel en la forma matricial, para programar. En la ecuación

$$Ax = b$$

pasamos Ax al lado derecho, luego multiplicamos ambos lados por L^{-1} por la izquierda. Después de esto, sumamos x a ambos lados:

$$x = x + L^{-1}(b - Ax).$$

En forma iterativa,

$$x^{(s+1)} = x^{(s)} + L^{-1}(b - Ax^{(s)}).$$

Escribimos comandos correspondientes en el lenguaje MATLAB utiliizando nuestra función `solvelt` (programada anteriormente) que resuelve sistemas triangulares inferiores.

```
p = solvelt(L, r);
q = A * p;
x = x + p;
r = r - q;
```