Métodos iterativos de Jacobi y Gauss–Seidel en coordenadas

Objetivos. Aplicar los métodos de Jacobi y Gauss–Seidel a la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

1. Idea de los métodos iterativos. Se considera un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$. En ambos métodos se construye una sucesión de vectores $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $\ldots$, que bajo ciertas condiciones converge a la solución exacta del sistema.

2. Método de Jacobi.

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{A_{i,i}} \left(b_i - \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} A_{i,j} x_j^{(k-1)} \right).$$

3. Método de Gauss–Seidel.

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{A_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j^{(k-1)} \right).$$

4. Definición (matriz estrictamente diagonal dominante por renglones). Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se llama *estrictamente diagonal dominante por renglones* si

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad |A_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} |A_{i,j}|.$$

esto es, si el valor absoluto de cada entrada diagonal es estrictamente mayor que la suma de los valores absolutos de las demás entradas del renglón correspondiente.

5. Condición suficiente que garantiza la convergencia. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz estrictamente diagonal dominante, entonces los métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel convergen para todo $b \in \mathbb{R}^n$.

6. Ejercicio. Aplicar al siguiente sistema de ecuaciones lineales los métodos de Jacobi y de Gauss–Seidel:

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$