Reflexiones de Householder

Objetivos. Definir la transformación de Householder (reflector de Householder) y estudiar sus propiedades básicas.

Requisitos. Proyección ortogonal sobre una recta, matrices ortogonales.

Definición y propiedades elementales

En este tema suponemos que $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1. Recuerde la definición geométrica de la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por el vector a. Escriba la matriz P_a de este operador lineal. Repase la demostración de las propiedades

$$P_a^2 = P_a, \qquad P_a^\top = P_a.$$

2. Explique la definición geométrica del reflector de Householder H_a. Muestre que H_a se expresa a través de P_a de la siguiente manera:

$$H_a = I - 2P_a.$$

3. Muestre que

$$H_a(v) = v - \frac{2a^\top v}{a^\top a}\, a.$$

4. Muestre que H_v tiene la siguiente representación matricial:

$$H_a = I - \frac{2}{a^\top a}\, aa^\top.$$

5. Propiedades de la matriz del reflector de Householder.

- es simétrica: $H_a^\top = H_a$.
- es una involución: $H_a^2 = I_n$.
- es ortogonal: $H_a^\top H_a = I_n$.

6. Sean $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Muestre que

$$H_{\lambda a} = H_a.$$

7. Imagen y núcleo del reflector de Householder (tarea adicional). Calcule $\operatorname{im}(H_a)$ y $\ker(H_a)$.

8. Valores y vectores propios del reflector de Householder (tarea adicional). Calcule el espectro de H_a. Explique cómo construir una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de H_a.

9. Sean $u, w \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|u\| = \|w\| = 1$. Construya un vector a tal que $P_a u = v$.

Cálculo de la transformación de Householder que convierte un vector dado en un múltiplo del vector e_1

10. Hacia el enunciado del problema. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Vamos a construir un vector $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $H_a x$ sea un múltiplo de e_1:

$$H_a x = \mu e_1.$$

Como la transformación H_a es ortogonal, $\|x\| = \|H_a x\| = |\mu|$. Tenemos dos opciones para μ. Vamos a considerar el problema con $\mu = \|x\|$.

Recordemos que H_a no se cambia al multiplicar a por un número no nulo (véase el Ejercicio 6). Por eso vamos a pedir que $a_1 = 1$.

11. Cálculo de la transformación de Householder que anula la cola de un vector dado. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \notin \ell(e_1)$. Construir $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $a_1 = 1$ y $H_a x = \|x\| e_1$.

Solución. Queremos que se cumpla la igualdad

$$x - 2P_a(x) = \|x\| e_1. \tag{1}$$

Recordemos que $P_a(x)$ es un múltiplo de a:

$$P_a(x) = \mu a. \tag{2}$$

Como $x \notin \ell(e_1)$, el número μ y el vector a deben ser no nulos. De (1) y (2) se sigue que

$$a = \frac{1}{2\mu}(x - \|x\| e_1).$$

Falta calcular μ. La primera componente del vector a_1 es

$$a_1 = \frac{1}{2\mu}(x - \|x\| e_1)_1 = \frac{1}{2\mu}(x_1 - \|x\|).$$

Por otro lado $a_1 = 1$. De aquí

$$\mu = \frac{x_1 - \|x\|}{2}$$

y

$$a = \frac{1}{\|x\| - x_1}\,(\|x\| e_1 - x).$$ □

12. Observación. Si $x_1 > 0$, entonces es mejor calcular $\frac{1}{\|x\| - x_1}$ de la siguiente manera:

$$\frac{1}{\|x\| - x_1} = \frac{\|x\| + x_1}{\|x\|^2 - x_1^2} = \frac{\|x\| + x_1}{\sigma},$$

donde

$$\sigma = \sum_{j=2}^{n} x_j^2 = x(2:n)^\top\, x(2:n).$$