Descomposición QR por medio de la ortonormalización de Gram y Schmidt (un tema del curso "Álgebra Lineal Numérica")

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

30 de abril de 2021

Problema: descomposición QR delgada

Está dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ con $m \leq n$ y $\mathrm{r}(A) = m$.

Encontrar $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tales que:

- las columnas de Q formen una lista ortonormal, esto es, $Q^\top Q = I_m$,
- la matriz R sea triangular superior.

Problema: descomposición QR delgada

Está dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ con $m \le n$ y $\mathrm{r}(A) = m$.

Encontrar $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $R \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tales que:

- las columnas de Q formen una lista ortonormal, esto es, $Q^\top Q = I_m$,
- la matriz R sea triangular superior.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} \\ A_{5,1} & A_{5,2} & A_{5,3} \end{bmatrix}}_{\text{columnas lin. indep.}} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} \end{bmatrix}}_{\text{columnas orthonormales}} \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} \\ 0 & R_{2,2} & R_{2,3} \\ 0 & 0 & R_{3,3} \end{bmatrix}.$$

Descomposición QR ancha o completa (no vamos a hacerla ahora)

Está dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ con $m \leq n$ y $\mathrm{r}(A) = m$.

Encontrar $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tales que:

- la matriz Q sea ortogonal, esto es, $Q^\top Q = I_n$ y $QQ^\top = I_n$,
- la matriz R sea triangular superior.

Descomposición QR ancha o completa (no vamos a hacerla ahora)

Está dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ con $m \le n$ y $\mathrm{r}(A) = m$.

Encontrar $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $R \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tales que:

- la matriz Q sea ortogonal, esto es, $Q^\top Q = I_n$ y $QQ^\top = I_n$,
- la matriz R sea triangular superior.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} \\ A_{5,1} & A_{5,2} & A_{5,3} \end{bmatrix}}_{\text{columnas lin. indep.}} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} & Q_{1,5} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} & Q_{2,5} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} & Q_{3,5} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} & Q_{4,5} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} & Q_{5,5} \end{bmatrix}}_{\text{matriz ortogonal}} \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} \\ 0 & R_{2,2} & R_{2,3} \\ 0 & 0 & R_{3,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hay varios métodos para resolver el problema de descomposición QR:

- método de ortogonalización de Gram y Schmidt,
- método modificado de ortogonalización de Gram y Schmidt,
- reflexiones ortogonales (reflexiones de Householder),
- rotaciones ortogonales (rotaciones de Givens).

Hay varios métodos para resolver el problema de descomposición QR:

- método de ortogonalización de Gram y Schmidt,
- método modificado de ortogonalización de Gram y Schmidt,
- reflexiones ortogonales (reflexiones de Householder),
- rotaciones ortogonales (rotaciones de Givens).

En este tema veremos el primer método.

Prerrequisitos para entender bien este tema.

- La proyección ortogonal de un vector al subespacio generado por una lista ortonormal de vectores.
- El complemento ortogonal de un vector respecto al subespacio generado por una lista ortonormal de vectores.
- Listas de vectores linealmente independientes y sus propiedades.
- Subespacios generados por listas de vectores y sus propiedades.
- Matrices ortogonales y matrices triangulares.
- Cada columna del producto AB es una combinación lineal de las columnas de A.

Proyección ortogonal de un vector al subespacio generado por una lista ortonormal de vectores (repaso)

Proposición

Sea $q_1, \ldots, q_m$ *una lista ortonormal de vectores en* $\mathbb{R}^n$*.*

Denotemos por S *al subespacio generado por* $q_1, \ldots, q_m$*:* $\quad S := \ell(q_1, \ldots, q_m)$*.*

Para cada k *en* $\{1, \ldots, m\}$ *pongamos*

$$\lambda_k := \langle v, q_k \rangle.$$

Definimos u *y* w *como*

$$u := \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k, \qquad w := v - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k.$$

Entonces $u \in S$*,* $w \in S^{\perp}$ *y* $u + w = v$*.*

Receta para el complemento ortogonal de un vector respecto un subespacio (repaso)

En la proposición anterior, el vector

$$\boxed{w := v - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k}$$

tiene la propiedad que $w \in S^{\perp}$, esto es,

$$\forall k \in \{1, \ldots, m\} \qquad w \perp q_k.$$

Sobre los subespacios generados

Proposición

Sean $q_1, \ldots, q_m, v, w$ *como en la proposición anterior. Entonces*

$$\ell(q_1, \ldots, q_m, v) = \ell(q_1, \ldots, q_m, w).$$

Sobre los subespacios generados

Proposición

Sean $q_1, \ldots, q_m, v, w$ como en la proposición anterior. Entonces

$$\ell(q_1, \ldots, q_m, v) = \ell(q_1, \ldots, q_m, w).$$

Idea de demostración. El vector w es una combinación lineal de $q_1, \ldots, q_m, v$:

$$w = v - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k,$$

Sobre los subespacios generados

Proposición

Sean $q_1, \ldots, q_m, v, w$ *como en la proposición anterior. Entonces*

$$\ell(q_1, \ldots, q_m, v) = \ell(q_1, \ldots, q_m, w).$$

Idea de demostración. El vector w es una combinación lineal de $q_1, \ldots, q_m, v$:

$$w = v - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k,$$

y el vector v es una combinación lineal de $q_1, \ldots, q_m, w$:

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k q_k + w.$$

Sobre los subespacios generados

Corolario

Sean $q_1, \ldots, q_m, v, w$ *como en la proposición anterior. Entonces*

$$v \in \ell(q_1, \ldots, q_m) \qquad \Longleftrightarrow \qquad w = 0_n.$$

Sobre los subespacios generados

Corolario

Sean $q_1, \ldots, q_m, v, w$ *como en la proposición anterior. Entonces*

$$v \in \ell(q_1, \ldots, q_m) \qquad \Longleftrightarrow \qquad w = 0_n.$$

Ejercicio. Demostrar el corolario usando la fórmula

$$\ell(q_1, \ldots, q_m, v) = \ell(q_1, \ldots, q_m, w).$$

Los producto internos en forma matricial (repaso)

Si $a, b \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\langle a, b \rangle = b^\top a.$$

Los producto internos en forma matricial (repaso)

Si $a, b \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\langle a, b \rangle = b^\top a.$$

Proposición

Si $A = [a_1, \ldots, a_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *y* $b \in \mathbb{R}^n$, *entonces*

$$\big[\langle b, a_k \rangle\big]_{k=1}^m = A^\top b.$$

Los producto internos en forma matricial (repaso)

Si $a, b \in \mathbb{R}^n$, entonces
$$\langle a, b\rangle = b^\top a.$$

Proposición

Si $A = [a_1, \ldots, a_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *y* $b \in \mathbb{R}^n$, *entonces*
$$\left[\langle b, a_k\rangle\right]_{k=1}^m = A^\top b.$$

Demostración.

Los producto internos en forma matricial (repaso)

Si $a, b \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\langle a, b\rangle = b^\top a.$$

Proposición

Si $A = [a_1, \ldots, a_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *y* $b \in \mathbb{R}^n$, *entonces*

$$[\langle b, a_k\rangle]_{k=1}^m = A^\top b.$$

Demostración. $A^\top b \in \mathbb{R}^m$. Para cada k en $\mathbb{R}^m$,

$$(A^\top b)_k = \sum_{j=1}^n (A^\top)_{k,j} b_j = \sum_{j=1}^n A_{j,k} b_j = \langle b, a_k\rangle.$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Supongamos que $a_1, \ldots, a_m$ es una lista linealmente independiente de vectores en $\mathbb{R}^n$.

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Supongamos que $a_1, \ldots, a_m$ es una lista linealmente independiente de vectores en $\mathbb{R}^n$.

Paso 1. Denotamos a_1 por w_1:

$$w_1 \coloneqq a_1.$$

Normalizamos w_1:

$$\nu_1 \coloneqq \|w_1\|, \qquad q_1 \coloneqq \frac{1}{\nu_1}\, w_1.$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso 2. Calculamos el complemento ortogonal de a_2 respecto $\ell(q_1)$:

$$w_2 := a_2 - P_{q_1} a_2.$$

En otras palabras,

$$\lambda_{1,2} := \langle a_2, q_1 \rangle, \qquad w_2 := a_2 - \lambda_{1,2} q_1.$$

Ahora normalizamos w_2:

$$\nu_2 := \|w_2\|, \qquad q_2 := \frac{1}{\nu_2} w_2.$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso 3. Calculamos el complemento ortogonal de a_3 respecto $\ell(q_1, q_2)$:

$$w_3 := a_3 - P_{q_1,q_2} a_3.$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso 3. Calculamos el complemento ortogonal de a_3 respecto $\ell(q_1, q_2)$:

$$w_3 \coloneqq a_3 - P_{q_1,q_2} a_3.$$

En otras palabras,

$$\lambda_{1,3} \coloneqq$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso 3. Calculamos el complemento ortogonal de a_3 respecto $\ell(q_1, q_2)$:

$$w_3 := a_3 - P_{q_1,q_2} a_3.$$

En otras palabras,

$$\lambda_{1,3} := \langle a_3, q_1 \rangle,$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso 3. Calculamos el complemento ortogonal de a_3 respecto $\ell(q_1, q_2)$:

$$w_3 := a_3 - P_{q_1,q_2} a_3.$$

En otras palabras,

$$\lambda_{1,3} := \langle a_3, q_1 \rangle, \qquad \lambda_{2,3} :=$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso 3. Calculamos el complemento ortogonal de a_3 respecto $\ell(q_1, q_2)$:

$$w_3 := a_3 - P_{q_1,q_2} a_3.$$

En otras palabras,

$$\lambda_{1,3} := \langle a_3, q_1 \rangle, \qquad \lambda_{2,3} := \langle a_3, q_2 \rangle,$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso 3. Calculamos el complemento ortogonal de a_3 respecto $\ell(q_1, q_2)$:

$$w_3 := a_3 - P_{q_1,q_2} a_3.$$

En otras palabras,

$$\lambda_{1,3} := \langle a_3, q_1 \rangle, \qquad \lambda_{2,3} := \langle a_3, q_2 \rangle, \qquad w_3 :=$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso 3. Calculamos el complemento ortogonal de a_3 respecto $\ell(q_1, q_2)$:

$$w_3 := a_3 - P_{q_1,q_2} a_3.$$

En otras palabras,

$$\lambda_{1,3} := \langle a_3, q_1 \rangle, \qquad \lambda_{2,3} := \langle a_3, q_2 \rangle, \qquad w_3 := a_3 - \lambda_{1,3} q_1 - \lambda_{2,3} q_2.$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso 3. Calculamos el complemento ortogonal de a_3 respecto $\ell(q_1, q_2)$:

$$w_3 := a_3 - P_{q_1,q_2} a_3.$$

En otras palabras,

$$\lambda_{1,3} := \langle a_3, q_1 \rangle, \qquad \lambda_{2,3} := \langle a_3, q_2 \rangle, \qquad w_3 := a_3 - \lambda_{1,3} q_1 - \lambda_{2,3} q_2.$$

Ahora normalizamos w_3:

$$\nu_3 := \|w_3\|, \qquad q_3 := \frac{1}{\nu_3} w_3.$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso k. En los pasos anteriores ya están calculados $q_1, \ldots, q_{k-1}$.

Calculamos el complemento ortogonal de a_k respecto $\ell(q_1, \ldots, q_{k-1})$:

$$w_k := a_k - P_{q_1,\ldots,q_{k-1}} a_k.$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso k. En los pasos anteriores ya están calculados $q_1, \ldots, q_{k-1}$.
Calculamos el complemento ortogonal de a_k respecto $\ell(q_1, \ldots, q_{k-1})$:

$$w_k := a_k - P_{q_1,\ldots,q_{k-1}} a_k.$$

En otras palabras,

$$\lambda_{j,k} :=$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso k. En los pasos anteriores ya están calculados $q_1, \ldots, q_{k-1}$.

Calculamos el complemento ortogonal de a_k respecto $\ell(q_1, \ldots, q_{k-1})$:

$$w_k \coloneqq a_k - P_{q_1,\ldots,q_{k-1}} a_k.$$

En otras palabras,

$$\lambda_{j,k} \coloneqq \langle a_k, q_j \rangle,$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso k. En los pasos anteriores ya están calculados $q_1, \ldots, q_{k-1}$.
Calculamos el complemento ortogonal de a_k respecto $\ell(q_1, \ldots, q_{k-1})$:

$$w_k := a_k - P_{q_1,\ldots,q_{k-1}} a_k.$$

En otras palabras,

$$\lambda_{j,k} := \langle a_k, q_j \rangle, \qquad w_k :=$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso k. En los pasos anteriores ya están calculados $q_1, \ldots, q_{k-1}$.

Calculamos el complemento ortogonal de a_k respecto $\ell(q_1, \ldots, q_{k-1})$:

$$w_k := a_k - P_{q_1,\ldots,q_{k-1}} a_k.$$

En otras palabras,

$$\lambda_{j,k} := \langle a_k, q_j \rangle, \qquad w_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{j,k} q_j.$$

Ortonormalización de Gram y Schmidt

Paso k. En los pasos anteriores ya están calculados $q_1, \ldots, q_{k-1}$.
Calculamos el complemento ortogonal de a_k respecto $\ell(q_1, \ldots, q_{k-1})$:

$$w_k := a_k - P_{q_1,\ldots,q_{k-1}} a_k.$$

En otras palabras,

$$\lambda_{j,k} := \langle a_k, q_j \rangle, \qquad w_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{j,k} q_j.$$

Ahora normalizamos w_k:

$$\nu_k := \|w_k\|, \qquad q_k := \frac{1}{\nu_k} w_k.$$

Propiedades del proceso de ortonormalización de Gram y Schmidt

Proposición

Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ *una lista linealmente independiente de vectores en* $\mathbb{R}^n$*.*

Definimos de manera sucesiva $w_1, \ldots, w_m$ *y* $q_1, \ldots, q_m$*:*

$$w_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle a_k, q_j \rangle q_j, \qquad q_k := \frac{1}{\|w_k\|}\, w_k.$$

Entonces

- *para cada* k *en* $\{1, \ldots, m\}$, $\quad w_k \neq 0_n$;
- *para cada* k *en* $\{1, \ldots, m\}$, $\quad \ell(a_1, \ldots, a_k) = \ell(q_1, \ldots, q_k)$;
- $(w_1, \ldots, w_m)$ *es una lista ortonormal.*

Expresión de $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en términos de $q_1, q_2, q_3, \ldots$

$$w_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{j,k} q_j, \qquad q_k = \frac{1}{\nu_k}\, w_k.$$

Expresión de $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en términos de $q_1, q_2, q_3, \ldots$

$$w_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{j,k} q_j, \qquad q_k = \frac{1}{\nu_k} w_k.$$

Esto implica que

$$a_k =$$

Expresión de $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en términos de $q_1, q_2, q_3, \ldots$

$$w_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{j,k} q_j, \qquad q_k = \frac{1}{\nu_k}\, w_k.$$

Esto implica que

$$a_k = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{j,k} q_j + w_k,$$

esto es,

Expresión de $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en términos de $q_1, q_2, q_3, \ldots$

$$w_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{j,k} q_j, \qquad q_k = \frac{1}{\nu_k}\, w_k.$$

Esto implica que

$$a_k = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{j,k} q_j + w_k,$$

esto es,

$$\boxed{a_k = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{j,k} q_j + \nu_k q_k.}$$

Expresión de $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en términos de $q_1, q_2, q_3, \ldots$

$$\boxed{a_k = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{j,k} q_j + \nu_k q_k.}$$

$$a_1 = \nu_1 q_1,$$

$$a_2 = \lambda_{1,2} q_1 + \nu_2 q_2,$$

$$a_3 = \lambda_{1,3} q_1 + \lambda_{2,3} q_2 + \nu_3 q_3,$$

$$\ldots$$

Un paso de la ortogonalización en forma matricial

$$\lambda_{j,k} := \langle a_k, q_j \rangle, \qquad w_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{j,k} q_j.$$

Denotemos por $\lambda^{(k)}$ el vector de los coeficientes:

$$\lambda^{(k)} = \left[\lambda_{j,k}\right]_{j=1}^{k-1} =$$

Un paso de la ortogonalización en forma matricial

$$\lambda_{j,k} := \langle a_k, q_j \rangle, \qquad w_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{j,k} q_j.$$

Denotemos por $\lambda^{(k)}$ el vector de los coeficientes:

$$\lambda^{(k)} = [\lambda_{j,k}]_{j=1}^{k-1} = \begin{bmatrix} q_1^\top a_k \\ \dots \\ q_{k-1}^\top a_k \end{bmatrix} =$$

Un paso de la ortogonalización en forma matricial

$$\lambda_{j,k} := \langle a_k, q_j \rangle, \qquad w_k := a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{j,k} q_j.$$

Denotemos por $\lambda^{(k)}$ el vector de los coeficientes:

$$\lambda^{(k)} = [\lambda_{j,k}]_{j=1}^{k-1} = \begin{bmatrix} q_1^\top a_k \\ \dots \\ q_{k-1}^\top a_k \end{bmatrix} = [q_1, \dots, q_{k-1}]^\top a_k.$$

Luego, la combinación lineal en la fórmula para w_k se puede escribir como el producto de una matriz por un vector:

$$w_k = a_k - [q_1, \dots, q_{k-1}]\,\lambda^{(k)}.$$

La forma matricial de la ortonormalización de Gram–Schmidt

Suponemos que los vectores $a_1, \ldots, a_m$ están dados como las columnas de una matriz A:

$$A = [a_1, \ldots, a_m].$$

Vamos a construir una sucesión finita de matrices $Q^{(0)}, \ldots, Q^{(m)}$, transformando A en Q:

$$Q^{(0)} = A, \qquad Q^{(1)}, \qquad \ldots, \qquad Q^{(m)} = Q = [q_1, \ldots, q_m].$$

Además, vamos a guardar los coeficientes $\lambda_{j,k}$ y ν_k en una matriz R:

$$R = \begin{bmatrix} \nu_1 & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} \\ 0 & \nu_2 & \lambda_{2,3} \\ 0 & 0 & \nu_3 \end{bmatrix}.$$

La forma matricial de la ortonormalización de Gram–Schmidt

Empezamos con $Q = A$, $R = I_m$.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}.$$

La forma matricial de la ortonormalización de Gram–Schmidt

Empezamos con $Q = A$, $R = I_m$.

$$Q = \begin{bmatrix} \colorbox{yellow}{$Q_{1,1}$} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} \nu_1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}.$$

$k = 1$, normalización:

$$R(1,1) \leftarrow \|Q(:,1)\|, \qquad Q(:,1) \leftarrow \frac{1}{R(1,1)} Q(:,1).$$

La forma matricial de la ortonormalización de Gram–Schmidt

Empezamos con $Q = A$, $R = I_m$.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} \nu_1 & \lambda_{1,2} & & \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}.$$

$k = 2$, complemento ortogonal:

$$R(1:1,2) \leftarrow Q(:,1:1)^\top Q(:,2), \qquad Q(:,2) \leftarrow Q(:,2) - Q(:,1:1)R(1:1,2)$$

La forma matricial de la ortonormalización de Gram–Schmidt

Empezamos con $Q = A$, $R = I_m$.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} \nu_1 & \lambda_{1,2} & & \\ 0 & \nu_2 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}.$$

$k = 2$, normalización:

$$R(2,2) \leftarrow \|Q(:,2)\|, \qquad Q(:,2) \leftarrow \frac{1}{R(2,2)} Q(:,2).$$

La forma matricial de la ortonormalización de Gram–Schmidt

Empezamos con $Q = A$, $R = I_m$.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} \nu_1 & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \\ 0 & \nu_2 & \lambda_{2,3} & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}.$$

$k = 3$, complemento ortogonal:

$$R(1:2,3) \leftarrow Q(:,1:2)^\top Q(:,3), \qquad Q(:,3) \leftarrow Q(:,3) - Q(:,1:2)R(1:2,3)$$

La forma matricial de la ortonormalización de Gram–Schmidt

Empezamos con $Q = A$, $R = I_m$.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} \nu_1 & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \\ 0 & \nu_2 & \lambda_{2,3} & \\ 0 & 0 & \nu_3 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}.$$

$k = 3$, normalización:

$$R(3,3) \leftarrow \|Q(:,3)\|, \qquad Q(:,3) \leftarrow \frac{1}{R(3,3)} Q(:,3).$$

La forma matricial de la ortonormalización de Gram–Schmidt

Empezamos con $Q = A$, $R = I_m$.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} \nu_1 & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \lambda_{1,4} \\ 0 & \nu_2 & \lambda_{2,3} & \lambda_{2,4} \\ 0 & 0 & \nu_3 & \lambda_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}.$$

$k = 4$, complemento ortogonal:

$$R(1:3,4) \leftarrow Q(:,1:3)^\top Q(:,4), \qquad Q(:,4) \leftarrow Q(:,4) - Q(:,1:3)R(1:3,4)$$

La forma matricial de la ortonormalización de Gram–Schmidt

Empezamos con $Q = A$, $R = I_m$.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} \nu_1 & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \lambda_{1,4} \\ 0 & \nu_2 & \lambda_{2,3} & \lambda_{2,4} \\ 0 & 0 & \nu_3 & \lambda_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & \nu_4 \end{bmatrix}.$$

$k = 4$, normalización:

$$R(4,4) \leftarrow \|Q(:,4)\|, \qquad Q(:,4) \leftarrow \frac{1}{R(4,4)} Q(:,4).$$

Expresión de A en términos de Q y R

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} \nu_1 & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \lambda_{1,4} \\ 0 & \nu_2 & \lambda_{2,3} & \lambda_{2,4} \\ 0 & 0 & \nu_3 & \lambda_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & \nu_4 \end{bmatrix}.$$

Expresión de A en términos de Q y R

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} \nu_1 & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \lambda_{1,4} \\ 0 & \nu_2 & \lambda_{2,3} & \lambda_{2,4} \\ 0 & 0 & \nu_3 & \lambda_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & \nu_4 \end{bmatrix}.$$

Calculemos una columna del producto:

$$(QR)_{*,3} =$$

Expresión de A en términos de Q y R

$$
Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} \nu_1 & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \lambda_{1,4} \\ 0 & \nu_2 & \lambda_{2,3} & \lambda_{2,4} \\ 0 & 0 & \nu_3 & \lambda_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & \nu_4 \end{bmatrix}.
$$

Calculemos una columna del producto:

$$
(QR)_{*,3} = QR_{*,3} =
$$

Expresión de A en términos de Q y R

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} \nu_1 & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \lambda_{1,4} \\ 0 & \nu_2 & \lambda_{2,3} & \lambda_{2,4} \\ 0 & 0 & \nu_3 & \lambda_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & \nu_4 \end{bmatrix}.$$

Calculemos una columna del producto:

$$(QR)_{*,3} = QR_{*,3} = \lambda_{1,3} q_1 + \lambda_{2,3} q_2 + \nu_3 q_3 =$$

Expresión de A en términos de Q y R

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & Q_{1,3} & Q_{1,4} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & Q_{2,3} & Q_{2,4} \\ Q_{3,1} & Q_{3,2} & Q_{3,3} & Q_{3,4} \\ Q_{4,1} & Q_{4,2} & Q_{4,3} & Q_{4,4} \\ Q_{5,1} & Q_{5,2} & Q_{5,3} & Q_{5,4} \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} \nu_1 & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \lambda_{1,4} \\ 0 & \nu_2 & \lambda_{2,3} & \lambda_{2,4} \\ 0 & 0 & \nu_3 & \lambda_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & \nu_4 \end{bmatrix}.$$

Calculemos una columna del producto:

$$(QR)_{*,3} = QR_{*,3} = \lambda_{1,3} q_1 + \lambda_{2,3} q_2 + \nu_3 q_3 = a_3.$$

Generalizando esta idea, se puede demostrar que

$$QR = A.$$

¿Qué pruebas podemos hacer?

Después de calcular Q y R a partir de A, podemos hacer las siguientes pruebas.

- QR debe ser

¿Qué pruebas podemos hacer?

Después de calcular Q y R a partir de A, podemos hacer las siguientes pruebas.

- QR debe ser A.
- $Q^\top Q$ debe ser

¿Qué pruebas podemos hacer?

Después de calcular Q y R a partir de A, podemos hacer las siguientes pruebas.

- QR debe ser A.
- $Q^\top Q$ debe ser I_m.
- R debe ser

¿Qué pruebas podemos hacer?

Después de calcular Q y R a partir de A, podemos hacer las siguientes pruebas.

- QR debe ser A.
- $Q^\top Q$ debe ser I_m.
- R debe ser triangular superior.

Para verificar que dos matrices A y B son aproximadamente iguales, podemos calcular la norma de Frobenius de $A - B$.

Función en GNU Octave

```
function [Q, R] = qr_gram_schmidt(A),
    [n, m] = size(A);
    Q = A;
    R = eye(m);
    for k = 1 : m,
        R(1 : k - 1, k) = Q(:, 1 : k - 1)' * Q(:, k);
        Q(:, k) -= Q(:, 1 : k - 1) * R(1 : k - 1, k);
        R(k, k) = norm(Q(:, k));
        Q(:, k) = (1 / R(k, k)) * Q(:, k);
    endfor
endfunction
```

Prueba en GNU Octave

```
function [er] = test_qr_gram_schmidt(n, m),
    A = randn(n, m);
    [Q, R] = qr_gram_schmidt(A);
    er1 = norm(Q * R - A);
    er2 = norm(Q' * Q - eye(m));
    er3 = norm(triu(R) - R);
    er = [er1, er2, er3];
endfunction
```