Teorema de Gershgorin
para estimar los valores propios

Objetivos. Demostrar el teorema de Gershgorin sobre la ubicación de valores propios.

Matrices estrictramente diagonal dominantes

1. Definición (matriz estrictramente diagonal dominante por renglones). Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se llama *estrictramente diagonal dominante por renglones* is para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple la desigualdad

$$|A_{j,j}| > \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} |A_{j,k}|.$$

2. Teorema (invertibilidad de una matriz estrictramente diagonal dominante por renglones). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz estrictramente diagonal dominante por renglones. Entonces A es invertible.

Demostración. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ pongamos

$$q_j \coloneqq \frac{1}{|A_{j,j}|} \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} |A_{j,k}|.$$

Denotemos por Q al máximo entre los números $q_1, \ldots, q_n$:

$$Q \coloneqq \max_{1 \le j \le n} q_j.$$

La condición que A es estrictramente diagonal dominante significa que $q_j < 1$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, lo cual es equivalente a la desigualdad $Q < 1$.

Sea $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $Ax = \mathbf{0}_n$. Entonces para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos

$$A_{j,j} x_j = -\sum\nolimits_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} A_{j,k} x_k,$$

de donde

$$|x_j| \le \frac{1}{|A_{j,j}|} \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} |A_{j,k}| |x_k| \le q_j \|x\|_\infty \le Q \|x\|_\infty.$$

Por lo tanto,

$$\|x\|_\infty \le Q \|x\|_\infty.$$

Como $Q < 1$, concluimos que $\|x\|_\infty = 0$ y $x = \mathbf{0}_n$. $\square$

Vamos a demostrar solamente la primera parte del teorema de Gershgorin.

3. Teorema de Gershgorin. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ pongamos

$$r_j \coloneqq \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} |A_{j,k}|.$$

Entonces el espectro de A está contenido en la unión de los discos cerrados con centros $A_{j,j}$ y radios r_j:

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \left(A_{j,j} + r_j \overline{\mathbb{D}}\right),$$

esto es, para cada valor propio $\lambda \in \sigma(A)$ existe un $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $|\lambda - A_{j,j}| \le r_j$.

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$|\lambda - A_{j,j}| > r_j.$$

Demostremos que la matriz $A - \lambda I$ es invertible. Notamos que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$|(A - \lambda I)_{j,j}| = |A_{j,j} - \lambda| > r_j = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} |A_{j,k}| = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} |(A - \lambda I)_{j,k}|.$$

Hemos demostrado que la matriz $A - \lambda I$ es estrictramente diagonal dominante por renglones. Pero esto implica que $A - \lambda I$ es invertible. □