Programación:
Sistemas tridiagonales de ecuaciones lineales

Objetivos. Escribir una función que resuelva sistemas de ecuaciones lineales de la siguiente forma (para un orden n arbitrario):

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Sistemas tridiagonales surgen en muchas aplicaciones, por ejemplo, en la interpolación segmentaria cúbica y en el método de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones de la frontera.

Requisitos. Idea de la eliminación de Gauss, sustitución hacia atrás, programación con vectores y matrices.

1. Ejemplo. Mostremos la idea de solución con un ejemplo. Primero aplicamos operaciones elementales y reducimos la matriz del sistema a una matriz triangular superior. Usamos las entradas diagonales como pivotes:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{2} & 3 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & 4 & -11 \\ 0 & 5 & 2 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 += 2R_1]{\mu = -\frac{-4}{2} = 2} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 4 & -9 \\ 0 & 5 & 2 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 += -5R_2]{\mu = -\frac{5}{1} = -5} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & -18 & 54 \end{array}\right].$$

La última matriz aumentada corresponde al siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1; \\ \phantom{2x_1 + {}} x_2 + 4x_3 = -9; \\ - 18x_3 = 54. \end{cases}$$

Calculamos x_3, x_2, x_1 (usamos la tercera ecuación, luego la segunda, y luego la primera):

$$x_3 = \frac{54}{-18} = -3; \qquad x_2 = \frac{-9 - 4x_3}{1} = 3; \qquad x_1 = \frac{1 - 3x_2}{2} = -4.$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 + 9 \\ 16 - 15 - 12 \\ 0 + 15 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Fórmulas para resolver un sistema tridiagonal
(se recomienda deducirlas antes de la clase práctica)

En la primera etapa hacemos operaciones elementales del tipo $R_{p+1} += \mu R_p$ para eliminar los coeficientes c_k. Los coeficientes nuevos de la diagonal principal denotemos por d_k y las constantes nuevas (en el lado derecho del sistema) denotemos por s_k.

2. Ejemplo: $n = 5$, etapa preparatoria. Las entradas a_1 y r_1 no necesitan ninguna modificación, solamente las copiamos en las variables d_1 y s_1 para hacer los siguientes pasos del algoritmo más regulares. Están marcadas las variables que obtienen valores nuevos:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & r_1 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & c_1 & a_3 & b_3 & 0 & r_3 \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 & b_4 & r_4 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & a_5 & r_5 \end{array}\right] \xrightarrow[\;]{\substack{d_1 := a_1 \\ s_1 := r_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{d_1} & b_1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{s_1} \\ c_1 & d_2 & b_2 & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & c_2 & d_3 & b_3 & 0 & r_3 \\ 0 & 0 & c_3 & d_4 & b_4 & r_4 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & a_5 & r_5 \end{array}\right]$$

Para deducir las fórmulas que se aplican en el p-ésimo paso del algoritmo consideremos un caso particular:

3. Ejemplo: $n = 5$, paso $p = 3$. Supongamos que $n = 5$ y que ya hemos hecho los primeros dos pasos del algoritmo. Consideremos el tercer paso. Vamos a realizar una operación elemental de la forma $R_4 += \mu R_3$. La entrada d_3 es el pivote, y las entradas d_4 y s_4 son las que obtienen valores nuevos:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} d_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & d_2 & b_2 & 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & d_3 & b_3 & 0 & s_3 \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 & b_4 & r_4 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & a_5 & r_5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 += \mu R_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} d_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & d_2 & b_2 & 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & d_3 & b_3 & 0 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{d_4} & b_4 & \boxed{s_4} \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & a_5 & r_5 \end{array}\right]$$

El coeficiente μ elegimos de tal manera que la operación elemental $R_4 += \mu R_3$ elimine la entrada c_3:

$$c_3 + \mu d_3 = 0; \qquad \Longrightarrow \qquad \mu = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Además la operación $R_4 += \mu R_3$ afecta a las entradas que tenían valores a_4 y r_4. Denotamos sus valores nuevos por d_4 y s_4 y los calculamos mediante las siguientes fórmulas:

$$d_4 = \underbrace{\qquad}_{?} + \mu \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad\qquad s_4 = \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?}\,\underbrace{\qquad}_{?}.$$

4. Primera etapa: fórmulas generales.

El contador del ciclo p toma valores desde $\underbrace{\qquad}_{?}$ hasta $\underbrace{\qquad}_{?}$.

Vamos a planear la p-ésima iteración del ciclo:

- Queremos eliminar c_p aplicando una operación elemental $R_{p+1} += \mu R_p$.
  El coeficiente μ de esta operación elemental se calcula de tal manera que se elimine la entrada c_p:

$$c_p \; + \; \mu \; \underbrace{\qquad\quad}_{?} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu := \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}.$$

- Para realizar la operación elemental $R_{p+1} += \mu R_p$, los valores nuevos de a_{p+1} y r_{p+1} denotados por d_{p+1} y s_{p+1} respectivamente, se calculan mediante las siguientes fórmulas:

$$d_{p+1} := \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}, \qquad\qquad s_{p+1} := \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

5. Segunda etapa: sustitución hacia atrás. Consideremos la segunda etapa cuando la matriz del sistema es triangular superior:

$$\begin{bmatrix} d_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix}.$$

Calculemos $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

- Escribimos de manera explícita la última ecuación (que contiene x_5) y despejamos la incógnita x_5:

$$\underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?} = s_5 \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad x_5 = \underbrace{\qquad\;}_{?}.$$

- Escribimos de manera explícita la k-ésima ecuación y despejamos la incógnita x_k expresándola a través de x_{k+1}:

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?} = \underbrace{\quad\;}_{?} \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad x_k = \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}.$$

Programación del algoritmo

6. Problema SolveTridiag. Escriba una función que resuelva el sistema (1) y regrese el vector x. Puede usar el siguiente esbozo (cambie ... por las fórmulas correctas):

```
Entrada: las listas a, b, c, r;
Variables locales: n, d, s, p, x, mu;
d := copia de a;
s := copia de r;
n := longitud de a;
Para p := de 1 hasta ...:
   mu := ...;
   d[p + 1] += mu * ...;
   s[p + 1] += ...;
x := lista nula de longitud n;
x[n] := ...;
Para k desde ... hasta ...:
   x[k] := ...;
Regresar x.
```

7. Prueba. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

tiene una solución única $[1, 2, -3, 4]^\top$. Por lo tanto, si pongamos

- a = el arreglo de números $3, -1, 1, 2$,
- b = el arreglo de números $1, 3, -2$,
- c = el arreglo de números $2, 2, 3$,
- r = el arreglo de números $5, -9, -7, -1$,

y llamamos la función `SolveTridiag` con argumentos a, b, c, r, entonces la función debe regresar el arreglo $1, 2, -3, 4$.

8. Número de operaciones aritméticas. Calcule el número de las operaciones de multiplicación y división en el algoritmo programado.

- Primer método: calcule el número de las operaciones de multiplicación y división dentro de cada ciclo y fuera de ciclos, luego transforme ciclos en sumas.
- Segundo método: analice en cuántas operaciones de multiplicación y división participa cada entrada de los arreglos a, b, c, r, d, s.