Programación: Sistemas triangulares inferiores

Autores de este texto: Egor Maximenko, Maria de los Angeles Isidro Pérez.

Objetivos. Programar el método de la *sustitución hacia adelante* para resolver sistemas de ecuaciones lineales con matrices triangulares inferiores.

Requisitos. Matrices triangulares, notación breve para las sumas, experiencia de programación: funciones, ciclos, vectores, matrices.

1. Ejemplo. Resolver el siguiente sistema triangular inferior de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & & & & & & & = & 6; \\ 3x_1 & - & x_2 & & & & & = & 4; \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & -4; \\ 3x_1 & & & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 5. \end{array}\right.$$

Solución. De la primera ecuación despejamos x_1, luego de la segunda ecuación despejamos x_2 y sustituimos el valor de x_1, etc.:

$$x_1 = \frac{6}{2} = \underbrace{\qquad}_{?};$$

$$x_2 = \frac{4 - 3x_1}{-1} = \frac{4-9}{-1} = \underbrace{\qquad}_{?};$$

$$x_3 = \frac{-4 - (4x_1 \qquad\qquad\qquad)}{\qquad\qquad\qquad} = \frac{\qquad\qquad\qquad}{} = \underbrace{\qquad}_{?};$$

$$x_4 = \frac{5 - (\qquad\quad + 0x_2 \qquad\qquad\quad)}{\qquad\qquad\qquad} = \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{} = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+0+0+0 \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \\ \underline{\qquad} \end{bmatrix}. \qquad \checkmark$$

$\square$

Notación breve para sumas

2. Ejemplos.

$$\sum_{k=2}^{5} a_k = \underset{\text{con } k=2}{a_k} + \underset{\text{con } k=3}{a_k} + \underset{\text{con } k=4}{a_k} + \underset{\text{con } k=5}{a_k} = a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

$$\sum_{q=4}^{7} c_q = c_4 + c_5 + c_6 + c_7, \qquad \sum_{j=3}^{5} b_j = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?},$$

$$\sum_{i=3}^{4} c_i d_i = c_3 d_3 + c_4 d_4, \qquad \sum_{j=1}^{4} a_j x_j = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

3. Sumas que dependen de parámetros.
La primera suma depende de k (k aparece en la respuesta); la segunda depende de i:

$$\sum_{j=1}^{4} A_{k,j} = A_{k,1} + A_{k,2} + A_{k,3} + A_{k,4}; \qquad \sum_{j=2}^{3} A_{i,j} x_j = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

4. Ejemplos: escribir con $\sum$.

$$A_{2,1}c_1 + A_{2,2}c_2 = \sum_{j=1}^{2} A_{2,j} c_j. \qquad c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 = \sum_{j=}\ \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

$$a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 = \sum\ \underbrace{\qquad\qquad}_{?}. \qquad b_1 c_2 + b_2 c_3 + b_3 c_4 + b_4 c_5 = \sum\ \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

5. Convenio: la suma del conjunto vacío de sumandos es cero.

Ejemplo: $$\sum_{k=1}^{0} b_k = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}:\\ 1\le k\le 0}} b_k = \sum_{k\in\emptyset} b_k = 0.$$

Fórmulas generales de la sustitución hacia adelante (se recomienda deducirlas antes de la clase práctica)

6. Fórmulas para $n = 4$. Consideremos un sistema de ecuaciones de la forma $Lx = b$, donde $L \in \mathrm{LT}_4(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^4$. Suponemos que todas las entradas diagonales de L son no nulas.

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} L_{1,1}x_1 & & & & & & & = & b_1; \\ L_{2,1}x_1 & + & L_{2,2}x_2 & & & & & = & b_2; \\ L_{3,1}x_1 & + & L_{3,2}x_2 & + & L_{3,3}x_3 & & & = & b_3; \\ L_{4,1}x_1 & + & L_{4,2}x_2 & + & L_{4,3}x_3 & + & L_{4,4}x_4 & = & b_4. \end{array}\right.$$

De la primera ecuación despejamos la incógnita x_1. De la segunda ecuación despejamos x_2 (expresamos x_2 a través de x_1). De la tercera ecuación despejamos la incógnita x_3 (la expresamos a través de x_1 y x_2). De la cuarta ecuación despejamos x_4.

$$x_1 =$$

$$x_2 =$$

$$x_3 = \Bigl(\underbrace{\qquad}_{?} - \bigl(\underbrace{\qquad\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad\qquad}_{?}\bigr)\Bigr) / \underbrace{\qquad}_{?} = \Bigl(\qquad - \sum \qquad\qquad \Bigr) / \qquad .$$

$$x_4 =$$

7. Fórmulas generales de la sustitución hacia adelante. Generalice las fórmulas del ejercicio anterior. Sea A una matriz triangular inferior $n \times n$ con entradas diagonales no nulas y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Escriba una fórmula para calcular x_i:

$$x_i = \left(\qquad\qquad\qquad\qquad \right) / \qquad . \tag{1}$$

8. Suma sobre el conjunto vacío. Por definición, cualquier suma sobre un conjunto vacío es cero. Por ejemplo,

$$\sum_{i=4}^{3} a_i = \sum_{i \in \mathbb{Z}\colon 4 \le i \le 3} a_i = \sum_{i \in \emptyset} a_i = 0.$$

Escriba la fórmula (1) para $i = 1$ y determine si esta es correcta.

Programación de la sustitución hacia adelante

9. Comando para calcular sumas en Wolfram Mathematica.

```
a = {1, 10, 100, 1000, 10000}

Sum[a[[k]], {k, 3, 5}]

Sum[k * k, {k, 1, 100}]

a = Table[Abs[i - j], {i, 4}, {j, 4}]; a // MatrixForm

Sum[a[[2, j]], {j, 2, 4}]

Sum[a[[2, j]], {j, 3, 2}]
```

10. Problema SolveLT (2 %). Escriba una función SolveLT que resuelva el sistema de ecuaciones lineales $Lx = b$.

Entrada: una matriz L y un vector b. Se supone que L es cuadrada y **triangular inferior**, con entradas diagonales no nulas, y que la longitud de b coincide con el orden de L.

Salida: un vector x tal que $Lx = b$.

11. Comprobación. Compruebe la función `SolveLT` usando los siguientes datos:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -13 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

```
L = ...

b = ...

x = SolveLT[L, b]

L . x
```
(*este producto debe coincidir con* b)