Programación: Multiplicación de un polinomio por un binomio

Objetivos. Escribir una función que multiplique un polinomio por un binomio. Vamos a usar esta función en otras partes del curso.

Requisitos. Ciclos, definición de una función en Wolfram Mathematica.

1. Listas (arreglos) en Wolfram Mathematica. El lenguaje Wolfram Mathematica no se hace la diferencia entre listas y arreglos; se puede usar cualquiera de estas dos palabras. Hay que tener en cuenta que

en Wolfram Mathematica los índices de elementos empiezan en 1.

Para acostumbrarse a la sintaxis ejecute los siguientes comandos uno por uno (después de cada comando oprima `Shift-Enter`). No es necesario teclear los (∗ *comentarios* ∗).

`a = {10, 20, 30}` (∗ *crear una lista con elementos 10, 20, 30* ∗)

`Length[a]` (∗ *longitud de la lista* ∗)

`a[[2]]` (∗ *obtener el valor del segundo elemento* ∗)

`a[[2]] = 70` (∗ *modificar el valor del segundo elemento* ∗)

`a` (∗ *ver la lista modificada* ∗)

`b = Table[0, {7}]` (∗ *crear una lista de longitud 7 con elementos nulos* ∗)

2. Guardar polinomios como listas de sus coeficientes. Vamos a representar los polinomios como listas de sus coeficientes, empezando con el término independiente. Por ejemplo, el polinomio

$$f(x) = 7x^4 - 3x^2 + 5x + 4$$

se guardará como la lista de números $4, 5, -3, 0, 7$. En general, el polinomio

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$$

guardamos como la lista $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Aquí n es el número de coeficientes, o sea la *longitud* de la lista de coeficientes. En vez de n se puede usar la variable $d = n - 1$, es decir, el *grado* del polinomio. Nótese que a_k es el coeficiente de x^{k-1}.

Fórmulas de multiplicación de un polinomio por un binomio (se recomienda deducirlas antes de la clase práctica)

3. Fórmulas para multilicar un polinomio de grado 3 por un binomio mónico. Sean $f(x)$ un polinomio de grado 3 y $g(x)$ un binomio mónico, es decir, un binomio cuyo coeficiente del grado mayor es 1:

$$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3, \qquad g(x) = b + x.$$

Notemos que el polinomio $f(x)$ es de grado 3 y por lo tanto tiene $\underbrace{\qquad}_{\text{¿cuántos?}}$ coeficientes.

En este caso el producto $f(x)g(x)$ es de grado $\underbrace{\quad}_{?}$, esto es, tiene $\underbrace{\qquad}_{\text{¿cuántos?}}$ coeficientes.

Denotemos los coeficientes del producto $f(x)g(x)$ por $c_1, \ldots, \underbrace{\qquad}_{?}$:

$$c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 = (a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)(b + x).$$

Exprese los coeficientes $c_1, \ldots, c_5$ a través de $a_1, \ldots, a_4$ y b:

$$c_1 = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?},$$

$$c_2 = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?},$$

$$c_3 = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?},$$

$$c_4 = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?},$$

$$c_5 = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Se puede ver que las fórmulas para c_2, c_3, c_4 tienen la misma estructura:

$$c_k = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}, \qquad \text{para} \qquad \underbrace{\quad}_{?} \le k \le \underbrace{\quad}_{?}.$$

Las fórmulas para los "coeficientes extremos" c_1 y c_5 son diferentes ("degeneradas").

4. Fórmulas para multiplicar un polinomio por un binomio mónico.

Sean

$$f(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1}, \qquad g(x) = b + x.$$

Entonces el producto $f(x)g(x)$ es de grado $\underbrace{\qquad}_{?}$, esto es, tiene $\underbrace{\qquad\quad}_{\text{¿cuantos?}}$ coeficientes.

Denotemos por $c_1, \ldots, c_{n+1}$ los coeficientes del producto $f(x)g(x)$:

$$c_1 + c_2 x + \cdots + c_{n+1} x^n = (a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1})(b + x).$$

Exprese los coeficientes $c_1, \ldots, c_{n+1}$ a través de los coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ y b.

$$c_1 = \underbrace{\qquad\quad}_{?};$$

$$c_k = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\quad}_{?} \qquad \text{para} \qquad \underbrace{\qquad}_{?} \le k \le \underbrace{\qquad}_{?};$$

$$c_{n+1} = \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

5. Algoritmo MulPolBinom (pseudocódigo).

función MulPolBinom(a, b):

variables locales: n, c, k;

$n \coloneqq$ longitud(a);

$c \coloneqq$ lista nula de longitud $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$;

$c_1 \coloneqq \underbrace{\qquad\quad}_{?}$;

para k de $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$ a $\underbrace{\qquad\quad}_{?}$:

$c_k \coloneqq \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$;

$c_{n+1} \coloneqq \underbrace{\qquad\quad}_{?}$;

regresar $\underbrace{\qquad}_{?}$.

Programar la multiplicación de un polinomio por un binomio en algún lenguaje de programación

6. Problema MulPolBinom (2 %).
Traduzca el algoritmo MulPolBinom a un lenguaje de programación. En otras palabras, escriba una función que calcule los coeficientes del producto de un polinomio $f(x)$ por un binomio $b + x$.

- Entrada (argumentos de la función): a, b,
  donde a es la lista de los coeficientes de $f(x)$.
- Salida (que debe regresar la función): la lista de los coeficientes del producto.

Por ejemplo, en el lenguaje Wolfram Mathematica la función MulPolBinom se puede definir de la siguiente manera (hay que sustituir `...` por expresiones apropiadas):

```
MulPolBinom[a_, b_] :=
  Module[{c, ...},
    n = Length[a];
    c = ...;
    c[[1]] = ...;
    ...

    ...
    c]
```

7. Primera comprobación. Es fácil ver que

$$(7 - 2x + 4x^2 - 5x^3)(3 + x) = 21 + x + 10x^2 - 11x^3 - 5x^4,$$

Por eso `MulPolBinom[{7,-2,4,-5},3]` debe regrear la lista `{21,1,10,-11,-5}`.

8. Segunda comprobación. Multiplique a mano el polinomio $5x^2-7x+3$ por el binomio $x + 2$. Luego ejecute `MulPolBinom[{3, -7, 5}, 2]`.