El segundo paso del método de Gauss

Autores de los ejercicios: Román Higuera García, Egor Maximenko.

Objetivos. Programar el segundo paso de la eliminación de Gauss sin pivoteo (esto es, con pivotes diagonales).

Requisitos. Operaciones elementales, programación de funciones y ciclos For.

1. Ejemplo. Está dada una matriz 4×4, con la característica de que las entradas de la primer columna son iguales a cero salvo la entrada $(1,1)$. Usando su entrada $(2,2)$ como pivote haga dos operaciones elementales que eliminen las entradas $(3,2)$ y $(4,2)$:

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 6 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{R_3 \mathrel{+}= \qquad\quad R_2 \\ R_4 \mathrel{+}= \qquad\quad R_2}} \begin{bmatrix} 7 & 4 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}.$$

2. Coeficientes de las operaciones elementales.
Consideremos una matriz B, de tamaño 5×4 con entradas símbolicas. Pidamos a B la característica de que las entradas de su primer columna sean iguales a cero salvo la entrada $B_{1,1}$. Luego apliquemos las operaciones elementales indicadas:

$$B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} \\ 0 & B_{3,2} & B_{3,3} & B_{3,4} \\ 0 & B_{4,2} & B_{4,3} & B_{4,4} \\ 0 & B_{5,2} & B_{5,3} & B_{5,4} \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{R_3 \mathrel{-}= \mu_3 R_2 \\ R_4 \mathrel{-}= \mu_4 R_2 \\ R_5 \mathrel{-}= \mu_5 R_2}} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} \\ 0 & B'_{3,2} & B'_{3,3} & B'_{3,4} \\ 0 & B'_{4,2} & B'_{4,3} & B'_{4,4} \\ 0 & B'_{5,2} & B'_{5,3} & B'_{5,4} \end{bmatrix}.$$

Queremos que las entradas $B'_{3,2}$, $\underbrace{\qquad}_{?}$ y $\underbrace{\qquad}_{?}$ sean iguales a cero, entonces:

$$0 = B'_{3,2} = B_{3,2} - \mu_3 B_{2,2} \qquad \Rightarrow \qquad \mu_3 = \frac{B_{3,2}}{B_{2,2}}$$

$$0 = B'_{4,2} = \underbrace{\qquad}_{?} - \mu_4 B_{2,2} \qquad \Rightarrow \qquad \mu_4 = \frac{\qquad}{B_{2,2}}$$

$$0 = B'_{5,2} = \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \qquad \mu_5 = \frac{\qquad}{B_{2,2}}$$

Note que los números μ_3, μ_4, μ_5 **no dependen** entre ellos de ninguna forma.

3. Coeficientes de las operaciones elementales con las cuales se eliminan las entradas por debajo de $(2, 2)$, en general.
Sea $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ dada como $B = [B_{i,j}]_{i,j=1}^{m,n}$. (No es escencial pedir a B que las entradas de su primer columna salvo la entrada $B_{1,1}$ sean iguales a cero, sin embargo pensaremos que es así). Utilizamos como pivote la entrada $B_{2,2}$ para anular las entradas $B_{3,2}, B_{4,2}, \ldots, B_{m,2}$. Para ello necesitamos hacer $m-2$ operaciones elementales, tales operaciones elementales serán, para $q = 3, 4, \ldots, m$:

$$R_q -= \mu R_p, \qquad \text{donde} \qquad \mu = \frac{\quad}{B_{2,2}}.$$

Programación del segundo paso de la eliminación de Gauss

4. Algoritmo ReduceSecondStep. Vamos a denotar por i al índice de la fila que estamos modificando.

Algoritmo ReduceSecondStep

> Entrada: Una matriz B.
>
> Variables locales: C, m, n, k, i, j, mu;
>
> $m :=$ número de filas de B;
>
> $n :=$ número de columnas de B;
>
> $C :=$ Una copia de B;
>
> // Comentario: usamos $C[[2, 2]]$ como pivote
>
> // y eliminamos $C[[i, 2]]$ para i de ____ a ____;
>
> Para i de ____ a ____:
>
>   mu $:= C[[\_\_, \_\_]]/C[[\_\_, \_\_]]$;
>
>   Para j de ____ a ____:
>
> $C[[i, j]] :=$ ________________;
>
> Salida: C.

5. Programar el segundo paso de la eliminación de Gauss (2 %). Escriba una función `ReduceSecondStep` de un argumento matricial que haga el segundo paso de la eliminación de Gauss.

> Entrada: una matriz rectangular B de tamaño $m \times n$, con $B_{2,2} \neq 0$.
>
> Salida: la matriz C que se obtiene de la matriz B al aplicar operaciones elementales que eliminen las entradas $B_{3,2}, \ldots, B_{m,2}$.

Programación de una operación elemental (recordatorio y optimización)

6. Trabajar con un corte de un renglón. Para recordar la sintaxis de Wolfram Mathematica ejecute los siguientes comandos:

- `B = RandomReal[{-1, 1}, {5, 5}]`
- `MatrixForm[B]`
- `B[[2, 3 ;; 5]]`

7. Pensemos en la operación elemental

$$B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & \dots & B_{1,n} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & \dots & B_{2,n} \\ 0 & B_{3,2} & B_{3,3} & B_{3,4} & \dots & B_{3,n} \\ 0 & B_{4,2} & B_{4,3} & B_{4,4} & \dots & B_{4,n} \\ 0 & B_{5,2} & B_{5,3} & B_{5,4} & \dots & B_{5,n} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 -= \mu R_2} \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} & \dots & B_{1,n} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} & \dots & B_{2,n} \\ 0 & B_{3,2} & B_{3,3} & B_{3,4} & \dots & B_{3,n} \\ 0 & B'_{4,2} & B'_{4,3} & B'_{4,4} & \dots & B'_{4,n} \\ 0 & B_{5,2} & B_{5,3} & B_{5,4} & \dots & B_{5,n} \end{bmatrix},$$

donde el coeficiente μ está elegido de tal manera que $B'_{4,2} = 0$.

Uno puede programar esta operación elemental con un ciclo, pero Wolfram Mathematica permite trabajar con renglones enteros o con partes de renglones.

Observaciones:

- La operación $R_4 -= \mu R_2$ se puede hacer con el comando

  `B[[4, All]] -= mu * B[[2, All]]`.

- La entrada $B_{4,1}$ no se modifica y sigue siendo igual a cero.
- El coeficiente μ está elegido de tal manera que $B'_{4,2} = 0$.
  No es necesario *calcular* $B'_{4,2}$; es suficiente *poner* $B_{4,2} = 0$.
- Las entradas que se deben calcular están en el cuarto renglón y en las columnas de 3 a n.

Tomando en cuenta lo anterior, se puede sustituir el ciclo sobre j por dos comandos:

- `B[[4, 2]] = 0;`
- `B[[4, 3 ;; n]] -= mu * B[[2, 3 ;; n]];`