Programación: Primer paso de la reducción de una matriz con pivotes diagonales

Autores: Román Higuera García, Egor Maximenko.

Objetivos. Programar el primer paso de la eliminación de Gauss sin pivoteo (esto es, con pivotes diagonales).

Requisitos. Operaciones elementales, programación de funciones y ciclos For.

Operaciones elementales

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, sean $p, q \in \{1, \ldots, m\}$ con $p \neq q$, $\mu \in \mathbb{R}$.
La notación $R_q += \mu R_p$ significa:

"A la q-ésima fila de la matriz A, sumar   ".

1. Operación elemental $R_q += \mu R_p$ para una matriz de tamaño 4×5.
Aplicar las operaciones elementales indicadas a la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & -3 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 7 & -1 \\ 8 & 4 & 5 & 1 & 7 \\ -4 & -1 & 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += -2R_1 \\ R_3 += -3R_1 \\ R_4 += \ \ 2R_1}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & -3 & 6 \\ & & & 13 & \\ 2 & & & & \\ & & & & \end{bmatrix}.$$

2. Operación elemental $R_q += \mu R_p$ para una matriz con entradas simbólicas.
Consideremos una matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ con entradas simbólicas, apliquemos a ella la operación $R_4 += \mu R_1$:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 += \mu R_1} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \\ A'_{4,1} & A'_{4,2} & A'_{4,3} \end{bmatrix}.$$

Escriba las fórmulas para obtener las nuevas entradas de la cuarta fila:

$$A'_{4,1} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}, \qquad A'_{4,2} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}, \qquad A'_{4,3} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

3. Operación elemental $R_q += \mu R_p$ para matrices de tamaño $m \times n$.
Consideremos una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ dada como $A = [A_{i,j}]_{i,j=1}^{m,n}$, aplicamos a ella la operación elemental $R_q += \mu R_p$. Entonces las nuevas entradas de la q-ésima fila de la matriz obtenida se calculan por la siguientes fórmulas:

$$
\begin{aligned}
A'_{q,1} &= \\
A'_{q,2} &= \\
&\vdots \\
A'_{q,n} &=
\end{aligned}
$$

4. Ejemplo. Está dada una matriz 4×4. Usando su entrada $(1,1)$ como pivote haga tres operaciones elementales que eliminen las entradas $(2,1)$, $(3,1)$ y $(4,1)$:

$$
\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 12 & 2 & 8 & 13 \\ 2 & 8 & 6 & 10 \\ 9 & 4 & 5 & 9 \end{bmatrix}
\xrightarrow{\substack{R_2 += \qquad R_1 \\ R_3 += \qquad R_1 \\ R_4 += \qquad R_1}}
\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ & & & \\ 0 & & & \\ & & & \end{bmatrix}.
$$

5. Números necesarios para eliminar entradas.
Consideremos ahora una matriz con entradas símbólicas de tamaño 4×4. Apliquemos a ella las operaciones elementales de la siguiente forma:

$$
\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}
\xrightarrow{\substack{R_2 += \mu_2 R_1 \\ R_3 += \mu_3 R_1 \\ R_4 += \mu_4 R_1}}
\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A'_{2,1} & A'_{2,2} & A'_{2,3} & A'_{2,4} \\ A'_{3,1} & A'_{3,2} & A'_{3,3} & A'_{3,4} \\ A'_{4,1} & A'_{4,2} & A'_{4,3} & A'_{4,4} \end{bmatrix}.
$$

Queremos que las entradas $A'_{2,1}, \underbrace{\qquad}_{?}$ y $\underbrace{\qquad}_{?}$ sean iguales a cero, entonces:

$$
0 = A'_{2,1} = A_{2,1} + \mu_2 A_{1,1} \qquad \Rightarrow \qquad \mu_2 = -\frac{A_{2,1}}{A_{1,1}}
$$

$$
0 = A'_{3,1} = \underbrace{\qquad}_{?} + \mu_3 A_{1,1} \qquad \Rightarrow \qquad \mu_3 = -\frac{\qquad}{A_{1,1}}
$$

$$
0 = A'_{4,1} = \qquad\qquad\qquad \Rightarrow \qquad \mu_4 = \quad \frac{\qquad}{A_{1,1}}
$$

Note que los números $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ **no dependen** entre ellos de ninguna forma.

6. Cálculo del número anulador para matrices en general.
Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Utilizamos como pivote la entrada $A_{1,1}$ para anular las entradas $A_{2,1}, A_{3,1}, \ldots, A_{m,1}$. Para ello necesitamos hacer $m-1$ operaciones elementales, tales operaciones elementales serán, para $q = 2, 3, \ldots, m$:

$$R_q += \mu R_p \qquad \text{dónde} \qquad \mu = \frac{\quad}{A_{1,1}}$$

7. Comandos de Wolfram Mathematica para hacer operaciones elementales.
Se recomienda ejecutar los siguientes comandos uno por uno para aprender los comandos de Wolfram Mathematica que pueden ser útiles para programar la eliminación de Gauss.

```
A = {{2, 5, 1, -3, 6}, {6, 2, 4, 7, -1}, {8, 4, 5, 1, 7}}

MatrixForm[A]

B = A  (* crear una copia *)

B[[1]]

B[[2]]

B[[1, 1]]

B[[2, 1]]
```

Usemos la entrada `B[[1, 1]]` como pivote para anular la entrada `B[[3, 1]]`:

```
mu = B[[3, 1]] / B[[1, 1]]

B[[3]] -= \mu * B[[1]]

MatrixForm[B]     (* para ver el resultado *)
```

Escriba la operación elemental que use `B[[1, 1]]` como pivote y anule `B[[2, 1]]`:

```
mu =

B[[  ]] -= mu * B[[  ]]
```

8. Algoritmo ReduceFirstStep.
Vamos a denotar por i al índice de la fila que estamos modificando.

Algoritmo ReduceFirstStep

Variables locales: B, m, n, k, i, j, mu;

$m :=$ número de filas de A;

$n :=$ número de columnas de A;

$B :=$ Una copia de A;

// Comentario: usamos $B[[1,1]]$ como pivote

// y eliminamos $B[[i,1]]$ para i de ____ a ____;

Para i de ____ a ____ hacer:

mu $= B[[\_\_, \_\_]]/B[[\_\_, \_\_]]$;

Para j de ____ a ____ hacer:

$B[[i,j]] =$ ________;

Salida : B

9. Programar el primer paso de la eliminación de Gauss (2 %). Escriba una función `ReduceFirstStep` de un argumento matricial que haga el primer paso de la eliminación de Gauss.

Entrada: una matriz rectangular A de tamaño $m \times n$, con $A_{1,1} \neq 0$.

Salida: la matriz B que se obtiene de la matriz A al aplicar operaciones elementales que eliminen las entradas $A_{2,1}, \ldots, A_{m,1}$.

10. Comprobación. Aplique la función `ReduceFirstStep` a la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 8 & 6 \\ 12 & 11 & -4 & 32 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 8 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$