Temas preliminares de Métodos Numéricos

Problemas para examen

Sistema binario

1. Convierta el número $\frac{3}{17}$ al sistema binario.

2. Convierta el siguiente número binario al sistema decimal:

$$x = 1101.01(101)_2 = 1101.01101101101101\ldots{}_2.$$

3. Convierta el siguiente número binario al sistema decimal:

$$x = 11.01(1010)_2 = 11.01101010101010\ldots{}_2.$$

4. Sea x un número real que tiene la siguiente representación periódica en el sistema binario:

$$x = \big(0.(b_1 b_2 b_3 b_4)\big)_2 = \big(0.b_1 b_2 b_3 b_4 b_1 b_2 b_3 b_4 b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots\big)_2,$$

donde $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0, 1\}$. Muestre que x es un número racional, es decir, escriba x como $\frac{p}{q}$ con algunos números enteros positivos p y q.

5. Sea x un número real cuya representación en el sistema binario es periódica, a partir de cierto momento. Puede suponer x es de la forma

$$x = \big(0.a_1 a_2 a_3 (b_1 b_2)\big)_2 = \big(0.a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_1 b_2 b_1 b_2 \ldots\big)_2,$$

con $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \in \{0, 1\}$. Es decir, los dígitos binarios a_1, a_2, a_3 están antes de la parte periódica y los dígitos binarios b_1, b_2 forman la parte periódica. Muestre que x es un número racional, es decir, representa x como $\frac{p}{q}$ con algunos números enteros positivos p y q.

Representación de los números en una computadora

6. Calcule la cantidad de los números positivos y de los negativos que se pueden representar en el formato `int8`.

7. Calcule la cantidad de los números positivos y de los negativos que se pueden representar en el formato `int16`.

8. Calcule la cantidad de los números que se pueden representar en el formato científico decimal con un dígito después del punto flotante, si el exponente puede tomar los valores $-2, \ldots, 2$. Indicación: considere por separado los números positivos, los negativos y el cero.

9. Calcule la cantidad de los números que se pueden representar en el formato científico binario con dos dígitos después del punto flotante, si el exponente puede tomar los valores $-1, \ldots, 1$. Haga un dibujo en el cual muestre todos estos números en el eje real. Indicación: considere por separado los números positivos, los negativos y el cero.

10. Encuentre el número mínimo x que sea mayor a 1 y que se pueda representar precisamente en el formato float32 (single precision floating-point format). Encuentre también el "ε de la máquina" del formato float32, esto es, el número $\varepsilon := x - 1$.

11. Encuentre el número mínimo x que sea mayor a 1 y que se pueda representar precisamente en el formato float64 (double precision floating-point format). Encuentre también el "ε de la máquina" del formato float64, esto es, el número $\varepsilon := x - 1$.

Errores de redondeo

12. Se considera la aritmética con dos dígitos decimales después del punto flotante y con el redondeo al más cercano. Muestre con un ejemplo que en esta aritmética se viola la ley distributiva. En otras palabras, encuentre tres números a, b, c tales que

$$\big(a \oplus b\big) \odot c \neq \big(a \odot c\big) \oplus \big(b \odot c\big).$$

Aquí $\oplus$ y $\odot$ son operaciones con redondeo:

$$a \oplus b := \rho_2(a + b), \qquad a \odot b := \rho_2(a \cdot b)$$

y ρ_2 es la operación de redondeo. Por ejemplo, $\rho_2(5.137 \cdot 10^{-7}) = 5.14 \cdot 10^{-7}$.

Multiplicación y división de los polinomios

13. ¿Cuándo el polinomio $x^3 + px + q$ se divide entre el polinomio $x^2 + mx - 1$? Esto es, ¿qué condiciones deben cumplir los parámetros p, q, m para ello?

14. ¿Cuándo el polinomio $x^4 + px^2 + q$ se divide entre el polinomio $x^2 + mx + 1$? Esto es, ¿qué condición deben cumplir los parámetros p, q, m para ello?

15. Expanda en potencias de x el polinomio $f(x+3)$, si

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 4x + 2.$$

16. Algoritmo de multiplicación de un polinomio por un binomio mónico. Escriba el algoritmo de la multiplicación de un polinomio por un binomio mónico de la forma $x + a$ y calcule el número de las multiplicaciones y adiciones en este algoritmo, si el grado del polinomio original es $n - 1$ (así que el polinomio original tiene n coeficientes).

17. Algoritmo de división de un polinomio entre un binomio mónico. Escriba el algoritmo de la división sintética de un polinomio entre un binomio $x - b$ (este algoritmo también se llama algoritmo de Horner o regla de Ruffini) y calcule el número de las multiplicaciones y adiciones en este algoritmo, si el grado del polinomio original es $n - 1$.

18. Fórmula para los coeficientes del producto de dos polinomios. Denotemos por a_i, b_j y c_k a los coeficientes de los polinomios $f(x)$, $g(x)$ y $h(x) = f(x)g(x)$ respectivamente:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j, \qquad h(x) = f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k.$$

Determine los límites de la sumatoria en la siguiente fórmula:

$$c_k = \sum_{i=?}^{?} a_i b_{k-i}.$$

Propiedades de las funciones continuas. Teorema del valor intermedio

19. Enuncie el *teorema del valor intermedio* en el caso particular (cuando f cambia el signo) y en el caso general. Deduzca el teorema general del caso particular. En otras palabras, demuestre el teorema general utilizando el caso particular.

20. Sean $f\colon [0,1] \to [0,1]$ y $g\colon [0,1] \to [0,1]$ algunas funciones continuas tales que

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad g(0) = 1, \qquad g(1) = 0.$$

Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = g(c)$.

21. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ algunas funciones continuas tales que

$$f(a) \le g(a) \qquad \text{y} \qquad f(b) \ge g(b).$$

Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

22. Construya una función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = -1$, $f(1) = 1$ y f no se anula en el intervalo $(0,1)$:

$$\forall x \in (0,1) \qquad f(x) \ne 0.$$

Dibuje la gráfica de la función construida.

23. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$f(a) < 3a + 5, \qquad f(b) > 3b + 5.$$

Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 3c + 5$.

Propiedades de las funciones derivables.
Teorema del valor medio y funciones Lipschitz continuas

24. Enuncie con todos los detalles el *teorema del valor medio* (llamado también el *teorema de Lagrange*).

25. Sea $X \subset \mathbb{R}$. ¿Cuándo una función $X \to \mathbb{R}$ se llama *uniformemente continua*? Escriba la definición con todos los detalles.

26. Sea $X \subset \mathbb{R}$. ¿Cuándo una función $X \to \mathbb{R}$ se llama *Lipschitz continua*? Escriba la definición con todos los detalles.

27. Sea f una función Lipschitz continua en un intervalo $[a, b]$. Demuestre que f es uniformemente continua en este intervalo.

28. Sea f una función Lipschitz continua en un intervalo $[a, b]$. Demuestre que f es acotada en este intervalo, esto es, existe una constante $M > 0$ tal que

$$\forall x \in [a, b] \qquad |f(x)| \leq M.$$

29. Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$. Denotemos por $\operatorname{int}(X)$ al conjunto de los puntos interiores de X. Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua en X y derivable en $\operatorname{int}(X)$. Además suponemos que la derivada de f es acotada, esto es, existe un número $M > 0$ tal que

$$\forall x \in \operatorname{int}(X) \qquad |f'(x)| \leq M.$$

Demuestre que f es Lipschitz continua en X.

30. Demuestre que la función $\quad f(x) = \cos(x) \quad$ es Lipschitz continua en $\mathbb{R}$.

31. Muestre que la función $f(x) = \tan(x)$ es Lipschitz continua en el intervalo $\big[0, \frac{\pi}{\pi}\big)$.

32. Demuestre que la función $\quad f(x) = x + \dfrac{1}{x} \quad$ cumple con una condición de Lipschitz en el intervalo $[a, +\infty)$, donde $0 < a < 1$.

33. Demuestre que la función $\quad f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x) \quad$ es Lipschitz continua en $\mathbb{R}$.

34. Sean f y g algunas funciones Lipschitz continuas en un intervalo $[a, b]$. Demuestre que su producto $h = fg$ también es una función Lipschitz continua en X.