Multiplicación de los polinomios

1. Ejemplo. Calcule el coeficiente de x^4 en el siguiente producto de polinomios:

$$(x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 7x - 2)(3x^3 - 9x^2 - 4x + 4).$$

Solución. La potencia x^4 se obtiene al multiplicar los siguientes términos:

$$\left(x^4 \;-\; 8x^3 \;+\; 5x^2 \;+\; 7x \;-\; 2\right)\left(3x^3 \;-\; 9x^2 \;-\; 4x \;+\; 4\right)$$

Así que el coeficiente de x^4 es

$$1 \cdot 4 \quad + \quad (-8)\cdot(-4) \quad + \quad 5\cdot(-9) \quad + \quad 7\cdot 3 \quad = \quad 4 + 32 - 45 + 21 \quad = \quad 12. \qquad \square$$

2. Calcule el coeficiente de x^3 en el siguiente producto de polinomios:

$$(2x^3 - 4x^2 + x - 5)(x^2 + 7x - 3).$$

3. Calcule el coeficiente de x^2 en el siguiente producto de polinomios:

$$(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)(b_2x^2 + b_1x + b_0).$$

4. Fórmula para los coeficientes del producto de los polinomios (tarea adicional). Denotemos por a_i, b_j y c_k a los coeficientes de los polinomios $f(x)$, $g(x)$ y $h(x) = f(x)g(x)$ respectivamente:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j, \qquad h(x) = f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k.$$

Los coeficientes c_k se expresan a través de los coeficientes a_i y b_j de la siguiente manera:

$$c_k = \sum_{\substack{(i,j):\\ 0\le i\le m,\\ 0\le j\le n,\\ i+j=k}} a_i b_j.$$

Esta notación quiere decir que la suma se toma sobre todos los pares ordenados de los índices (i,j) tales que $i \in \{0,\ldots,m\}$, $j \in \{0,\ldots,n\}$, $i+j=k$. Usando la igualdad $i+j=k$, podemos expresar j a través de i y k: $j = k - i$. Así que

$$c_k = \sum_{i=?}^{?} a_i b_{k-i}.$$

Determine los límites de la sumatoria en esta fórmula.

Multiplicación de un polinomio por un binomio

5. Fórmulas para multiplicar un polinomio por un binomio. Sea

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Consideremos el producto $h(x)$ del polinomio $f(x)$ por un binomio $(x + b)$ y denotemos por c_k los coeficientes de $h(x)$:

$$\begin{aligned} h(x) &= (x+b)f(x), \\ h(x) &= c_{n+1}x^{n+1} + c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0. \end{aligned}$$

Demuestre que

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_n, \\ c_k &= a_k b + a_{k-1} \qquad (k = n, n-1, \ldots, 1), \\ c_0 &= a_0 b. \end{aligned}$$

6. Multiplicación de un polinomio por un binomio, escribir los cálculos en una tabla. Es cómodo escribir los cálculos en una tabla. Por ejemplo, sea $n = 3$:

b	a_3	a_2	a_1	a_0	
	a_3	$a_3 b + a_2$	$a_2 b + a_1$	$a_1 b + a_0$	$a_0 b$

7. Ejemplo. Multiplicar el polinomio $f(x) = 3x^4 - x^2 + x - 5$ por el binomio $x + 2$.

Solución.

2	3	0	-1	1	-5	
	3	6	-1	-1	-3	-10

Respuesta: $3x^5 + 6x^4 - x^3 - x^2 - 3x - 10$. □

8. Programación: multiplicación de un polinomio por un binomio. En un lenguaje de programación escriba una función `mulpolynomialbinomial`. Los argumentos son la lista $a_n, \ldots, a_0$ de los coeficientes del polinomio $f(x)$ y el número b. La función debe regresar la lista $c_{n+1}, c_n, \ldots, c_0$ de los coeficientes del polinomio $(x + b)f(x)$.

9. Complejidad de la multiplicación de un polinomio por un binomio. Escriba el algoritmo de la multiplicación de un polinomio por un binomio y calcule el número de las multiplicaciones y adiciones en este algoritmo, si el grado del polinomio original es d.

Construcción de un polinomio que tenga las raíces dadas

10. Ejemplo. Construir el polinomio mónico f de grado mínimo que tenga las raíces dadas:

$$-1, \qquad 0, \qquad 2, \qquad 2, \qquad 3.$$

Solución. Calculemos el producto $(x+1)(x)(x-2)(x-2)(x-3)$:

1	1					
0	1	1				
-2	1	1	0			
-2	1	-1	-2	0		
-3	1	-3	0	4	0	
	1	-6	9	4	-12	0

Respuesta: $x^5 - 6x^4 + 9x^3 + 4x^2 - 12x$. $\square$