Problema de interpolación polinomial. Reducción a un sistema de ecuaciones lineales

1. Idea de la interpolación polinomial. Consideremos la siguiente situación: se tienen los valores de una función f en algunos puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pero no se sabe ninguna fórmula para la función f, o la fórmula es demasiado complicada. El objetivo es calcular los valores de f en otros puntos.

Para esto se construye un polinomio p cuyos valores en los puntos x_k $(1 \le k \le n)$ coinciden con los valores de f, es decir $p(x_k) = f(x_k)$. Bajo ciertas condiciones (a saber, cuando la función es muy suave) el polinomio p aproximará a la función original f también en otros puntos.

2. Aplicaciones de la interpolación polinomial.

- Calcular rápidamente los valores de funciones complicadas, usando las tablas de sus valores y la interpolación.
- Aproximar curvas complicadas, por ejemplo, las formas de letras en tipografía.
- En métodos numéricos: para la integración numérica y la solución numérica de ecuaciones diferenciales.
- Aproximar procesos complicados, hacer predicciones.

3. Observaciones sobre el grado del polinomio interpolante.

- Si están dados dos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), con $x_1 < x_2$, entonces existe una recta oblicua (si $y_1 \neq y_2$) o horizontal (si $y_1 = y_2$) que pasa por estos dos puntos. Algebraicamente esto significa que siempre existe un polinomio p de grado ≤ 1 tal que $p(x_1) = y_1$, $p(x_2) = y_2$.
- Si están dados tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), con $x_1 < x_2 < x_3$, entonces existe una parábola (simétrica respecto a un eje vertical) o una recta que pasa por estos puntos. Algebraicamente esto significa que podemos encontrar un polinomio interpolante de grado ≤ 2.
- Para n puntos será natural buscar un polinomio de grado $\le n - 1$.

Empecemos con ejemplos simples para comprender el problema.

4. Ejemplo: polinomio interpolante que pasa por dos puntos dados. Construir un polinomio

$$p(x) = c_0 + c_1 x \tag{1}$$

tal que

$$p(-3) = 2, \qquad p(1) = -2. \tag{2}$$

Usando la fórmula (1) escribimos las dos condiciones (2) como el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} c_0 & - & 3c_1 & = & 2; \\ c_0 & + & c_1 & = & -2. \end{cases}$$

Las incógnitas de este sistema de ecuaciones lineales son los coeficientes c_0 y c_1 del polinomio. Escribimos el sistema en la forma matricial y lo resolvemos con la eliminación de Gauss–Jordan:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

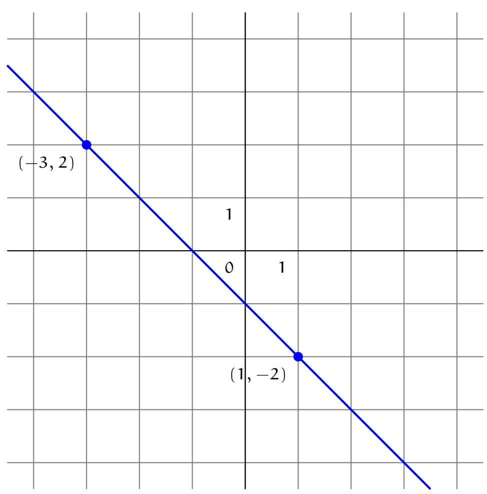
Respuesta:

$$p(x) = -1 - x.$$

Comprobamos que el polinomio p satisface las condiciones (2):

$$p(-3) = -1 - (-3) = 2; \quad \checkmark$$
$$p(1) = -1 - 1 = -2. \quad \checkmark$$

Geométricamente hemos encontrado una recta que pasa por los dos puntos dados:



5. Ejemplo: polinomio interpolante que pasa por tres puntos dados. Construir un polinomio $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ tal que

$$p(-2) = 9, \qquad p(3) = 4, \qquad p(4) = 15.$$

Sustituyendo $p(x)$ por $c_0+c_1x+c_2x^2$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} c_0 - 2c_1 + 4c_2 = 9; \\ c_0 + 3c_1 + 9c_2 = 4; \\ c_0 + 4c_1 + 16c_2 = 15. \end{cases}$$

Las incógnitas de este sistema son los coeficientes del polinomio. Escribamos el sistema en la forma matricial y resolvamos usando el método de eliminación de Gauss–Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 16 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

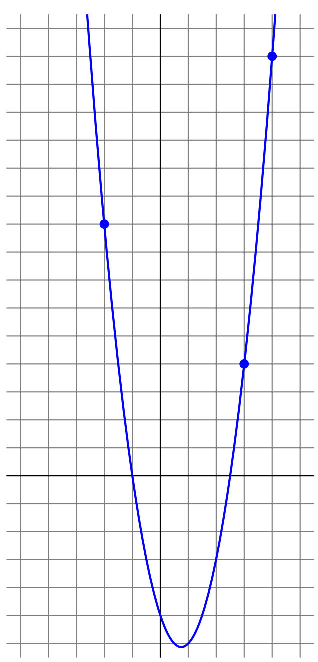
Respuesta:

$$p(x) = -5 - 3x + 2x^2.$$

Comprobación:

$$\begin{array}{r|c|c|c} & 2 & -3 & -5 \\ \hline -2 & 2 & -7 & 9 \end{array} \checkmark \qquad \begin{array}{r|c|c|c} & 2 & -3 & -5 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 4 \end{array} \checkmark \qquad \begin{array}{r|c|c|c} & 2 & -3 & -5 \\ \hline 4 & 2 & 5 & 15 \end{array} \checkmark$$

Geométricamente hemos encontrado una parábola simétrica respecto a un eje vertical que pasa por los tres puntos dados:



Para dibujar la parábola escribimos el trinomio p en la siguiente forma ("completamos al cuadrado"):

$$p(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}.$$

En esta representación se ven bien las coordenadas del vértice:

$$\frac{3}{4}, \qquad -\frac{49}{8}.$$