

Ejemplo de elección de un elemento pivote con varias estrategias de pivoteo

Egor Maximenko

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

9 de enero de 2015

- I. Eliminación de Gauss sin pivoteo (con pivotes diagonales).
- II. Pivoteo parcial (por columna).
- III. Pivoteo parcial escalado (por columna).
- IV. Pivoteo completo.

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$
de un sistema de ecuaciones lineales
después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso
aplicando varias estrategias de pivoteo.

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

¿Qué parte de la matriz participa en la búsqueda de pivotes?

No participan:

- el vector b ,
- $A_{1,*}$ (después del primer paso),
- $A_{*,1}$ (después del primer paso).

Las entradas que pueden participar en algunas estrategias de pivoteo son:

$$A_{i,j} \quad \text{con} \quad 2 \leq i, j \leq 5.$$

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

I. Eliminación de Gauss sin pivoteo, esto es, con pivotes diagonales:

el pivote será $A_{2,2}$.

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

II. Pivoteo parcial (pivoteo por columna).

Comparamos entre si los números

$$|A_{i,2}| \quad \text{con} \quad 2 \leq i \leq 5.$$

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

II. Pivoteo parcial (pivoteo por columna).

Comparamos entre si los números

$$|A_{i,2}| \quad \text{con} \quad 2 \leq i \leq 5.$$

$$|A_{2,2}| = 6,$$

$$|A_{3,2}| = 8,$$

$$|A_{4,2}| = 8,$$

$$|A_{5,2}| = 5.$$

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

II. Pivoteo parcial (pivoteo por columna).

Comparamos entre si los números

$$|A_{i,2}| \quad \text{con} \quad 2 \leq i \leq 5.$$

$$|A_{2,2}| = 6,$$

$$|A_{3,2}| = 8,$$

$$|A_{4,2}| = 8,$$

$$|A_{5,2}| = 5.$$

El pivote será $A_{3,2}$.

Otra buena opción es $A_{4,2}$.

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

III. Pivoteo parcial escalado.

$$M_i := \max_{2 \leq j \leq 5} |A_{i,j}| \quad (2 \leq i \leq 5).$$

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

III. Pivoteo parcial escalado.

$$M_i := \max_{2 \leq j \leq 5} |A_{i,j}| \quad (2 \leq i \leq 5).$$

$$M_2 = 9,$$

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

III. Pivoteo parcial escalado.

$$M_i := \max_{2 \leq j \leq 5} |A_{i,j}| \quad (2 \leq i \leq 5).$$

$$M_2 = 9,$$

$$M_3 = 9,$$

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

III. Pivoteo parcial escalado.

$$M_i := \max_{2 \leq j \leq 5} |A_{i,j}| \quad (2 \leq i \leq 5).$$

$$M_2 = 9,$$

$$M_3 = 9,$$

$$M_4 = 8,$$

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

III. Pivoteo parcial escalado.

$$M_i := \max_{2 \leq j \leq 5} |A_{i,j}| \quad (2 \leq i \leq 5).$$

$$M_2 = 9,$$

$$M_3 = 9,$$

$$M_4 = 8,$$

$$M_5 = 7,$$

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

III. Pivoteo parcial escalado.

$$M_i := \max_{2 \leq j \leq 5} |A_{i,j}| \quad (2 \leq i \leq 5).$$

Comparamos los cocientes $\frac{|A_{i,2}|}{M_i}$:

$$M_2 = 9,$$

$$M_3 = 9,$$

$$M_4 = 8,$$

$$M_5 = 7,$$

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

III. Pivoteo parcial escalado.

$$M_i := \max_{2 \leq j \leq 5} |A_{i,j}| \quad (2 \leq i \leq 5).$$

Comparamos los cocientes $\frac{|A_{i,2}|}{M_i}$:

$$M_2 = 9, \quad \frac{|A_{2,2}|}{M_2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$M_3 = 9,$$

$$M_4 = 8,$$

$$M_5 = 7,$$

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

III. Pivoteo parcial escalado.

$$M_i := \max_{2 \leq j \leq 5} |A_{i,j}| \quad (2 \leq i \leq 5).$$

Comparamos los cocientes $\frac{|A_{i,2}|}{M_i}$:

$$M_2 = 9, \quad \frac{|A_{2,2}|}{M_2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$M_3 = 9, \quad \frac{|A_{3,2}|}{M_3} = \frac{8}{9},$$

$$M_4 = 8,$$

$$M_5 = 7,$$

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

III. Pivoteo parcial escalado.

$$M_i := \max_{2 \leq j \leq 5} |A_{i,j}| \quad (2 \leq i \leq 5).$$

Comparamos los cocientes $\frac{|A_{i,2}|}{M_i}$:

$$M_2 = 9, \quad \frac{|A_{2,2}|}{M_2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$M_3 = 9, \quad \frac{|A_{3,2}|}{M_3} = \frac{8}{9},$$

$$M_4 = 8, \quad \frac{|A_{4,2}|}{M_4} = \frac{8}{8} = 1,$$

$$M_5 = 7,$$

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

III. Pivoteo parcial escalado.

$$M_i := \max_{2 \leq j \leq 5} |A_{i,j}| \quad (2 \leq i \leq 5).$$

Comparamos los cocientes $\frac{|A_{i,2}|}{M_i}$:

$$M_2 = 9, \quad \frac{|A_{2,2}|}{M_2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$M_3 = 9, \quad \frac{|A_{3,2}|}{M_3} = \frac{8}{9},$$

$$M_4 = 8, \quad \frac{|A_{4,2}|}{M_4} = \frac{8}{8} = 1,$$

$$M_5 = 7, \quad \frac{|A_{5,2}|}{M_5} = \frac{5}{7}.$$

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

III. Pivoteo parcial escalado.

$$M_i := \max_{2 \leq j \leq 5} |A_{i,j}| \quad (2 \leq i \leq 5).$$

Comparamos los cocientes $\frac{|A_{i,2}|}{M_i}$:

$$M_2 = 9, \quad \frac{|A_{2,2}|}{M_2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3},$$

$$M_3 = 9, \quad \frac{|A_{3,2}|}{M_3} = \frac{8}{9},$$

$$M_4 = 8, \quad \frac{|A_{4,2}|}{M_4} = \frac{8}{8} = 1,$$

$$M_5 = 7, \quad \frac{|A_{5,2}|}{M_5} = \frac{5}{7}.$$

El elemento pivote será $A_{4,2}$.

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

IV. Pivoteo completo.

Se busca el máximo valor absoluto entre los números

$$|A_{i,j}| \quad (2 \leq i, j \leq 5),$$

esto es, en toda la **parte activa** de A .

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

IV. Pivoteo completo.

Se busca el máximo valor absoluto entre los números

$$|A_{i,j}| \quad (2 \leq i, j \leq 5),$$

esto es, en toda la **parte activa** de A .

El pivote será $A_{2,5}$.

Otra buena opción es $A_{3,3}$.

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

¿Par qué sirven estrategias de pivoteo?

- Encontrar un pivote no nulo.
- Disminuir errores de redondeo.

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

¿Por qué sirven estrategias de pivoteo?

- Encontrar un pivote no nulo.
- Disminuir errores de redondeo.

Pivoteo humano (parcial o completo).

Trabajando con números racionales, es cómodo elegir pivotes de tal manera que después de las operaciones los denominadores no sean muy grandes.

Ejemplo.

Está dada la matriz aumentada $[A|b]$ de un sistema de ecuaciones lineales después de un paso del método de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -9 & 7 & 1 & 3 & -7 & -9 \\ 0 & -6 & -1 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & -9 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & -7 & 9 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & 4 & -8 \end{array} \right].$$

Elegir un pivote para el segundo paso aplicando varias estrategias de pivoteo.

¿Par qué sirven estrategias de pivoteo?

- Encontrar un pivote no nulo.
- Disminuir errores de redondeo.

Pivoteo humano (parcial o completo).

Trabajando con números racionales, es cómodo elegir pivotes de tal manera que después de las operaciones los denominadores no sean muy grandes.

¡Gracias por su paciencia!