Estrategias de pivoteo

Objetivos. Resolver sistemas de ecuaciones lineales aplicando varias técnicas de pivoteo; programar estos algoritmos.

Requisitos. Operaciones elementales, experiencia de resolver sistemas de ecuaciones lineales, programación de la eliminación de Gauss con pivotes diagonales.

Motivación: la eliminación de Gauss puede no funcionar

Para motivar el estudio de varias técnicas de pivoteo consideremos dos ejemplos cuando la eliminación con pivotes diagonales no procede. Luego veremos un ejemplo cuando la eliminación con pivotes diagonales funciona mal por cuestiones de redondeo.

1. Ejemplo cuando la eliminación con pivotes diagonales no procede. Consideremos al sistema de ecuaciones lineales dado por la siguiente matrix aumentada:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 4 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -4 & -1 \end{array}\right].$$

Apliquemos el primer paso de la eliminación de Gauss utilizando la entrada $(1,1)$ como pivote:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 4 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{R_2 \mathrel{+}= 2R_1 \\ R_3 \mathrel{+}= -R_1}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \end{array}\right].$$

En el segundo paso ya no podemos utilizar como pivote la entrada diagonal $(2,2)$ porque esta entrada es nula.

Varias técnicas de pivoteo

Vamos a ilustrar varias técnicas con el mismo ejemplo. Está dada una matriz aumentada A después del primer paso de la eliminación de Gauss. Estamos empezando el segundo paso ($p = 2$).

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 9 & -7 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 6 & -4 & -8 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & -7 & 7 & -2 & -7 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -6 & -3 & -5 \end{array}\right].$$

En general, denotamos por m al número de los renglones de la matriz y por n al número de las columnas. En el ejemplo $m = 5$ y $n = 6$.

2. Eliminación gaussiana sin pivoteo (con pivotes diagonales). En cada paso p se usa como pivote la entrada diagonal $A_{p,p}$. En el ejemplo $p = 2$ y el pivote será $A_{2,2}$.

3. Pivoteo parcial. En cada paso p se elige en calidad de pivote la entrada con índices (i_p, p) tal que

$$|A_{i_p,p}| = \max_{p \le i \le m} |A_{i,p}|,$$

es decir la mayor entrada (en el sentido absoluto) de la p-ésima columna empezando con (p, p) hasta (m, p). En el ejemplo, los candidatos para hacer el papel de pivote están marcados con verde:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 9 & -7 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 6 & -4 & -8 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & -7 & 7 & -2 & -7 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -6 & -3 & -5 \end{array}\right].$$

Hay que elegir el máximo entre sus valores absolutos:

$$|A_{2,2}| = 5, \qquad |A_{3,2}| = 6, \qquad |A_{4,2}| = 7, \qquad |A_{5,2}| = 2.$$

El máximo es $|A_{4,2}| = 7$, por eso la entrada $A_{4,2}$ se usará como pivote. Esto significa que se aplicará el intercambio de renglones $R_2 \leftrightarrow R_4$ con el cual la entrada -7 ocupará el lugar $(2, 2)$, y luego se aplicarán operaciones elementales para eliminar las entradas $(3, 2)$, $(4, 2)$ y $(5, 2)$.

4. Pivoteo parcial escalado. Supongamos que estamos en paso número p. En cada renglón i, con $p \le i \le m$, calculamos el valor máximo absoluto en la parte principal de la matriz:

$$s_i = \max_{p \le j \le m} |A_{i,j}|.$$

Supongamos que $s_i > 0$ para todo $i \in \{k, \ldots, m\}$. Elijamos el menor entero q con

$$\frac{|A_{q,k}|}{s_q} = \max_{p \le i \le m} \frac{|A_{i,p}|}{s_i}.$$

En otras palabras, sea q el menor de los índices i en los cuales la expresión $\frac{|A_{i,p}|}{s_i}$ alcanza su máximo. Si $q \ne p$, entonces se intercambian los renglones con índices p y q.

En el ejemplo de arriba tenemos

$$\begin{array}{l}\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 9 & -7 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 6 & -4 & -8 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & -7 & 7 & -2 & -7 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -6 & -3 & -5 \end{array}\right]\end{array} \begin{array}{l} \\ s_2 = \max(5,6,4,8) = 8 \\ s_3 = \max(6,3,5,2) = 6 \\ s_4 = \max(7,7,2,7) = 7 \\ s_5 = \max(2,0,6,3) = 6 \end{array}$$

Ahora hay que comparar los cocientes

$$\frac{|A_{2,2}|}{s_2} = \frac{5}{8}, \qquad \frac{|A_{3,2}|}{s_3} = \frac{6}{6} = 1, \qquad \frac{|A_{4,2}|}{s_4} = \frac{7}{7} = 1, \qquad \frac{|A_{5,2}|}{s_5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

El máximo se alcanza en $i = 3$ y en $i = 4$, por eso se elige como pivote la entrada $A_{3,2} = 6$. Esto significa que se hace el intercambio de renglones $R_2 \leftrightarrow R_3$ y luego se eliminan las entradas por abajo de $(2, 2)$.

Pivoteo completo

5. Pivoteo completo. En el k-ésimo paso se buscan los índices $p, q \in \{k, \ldots, m\}$ tales que

$$|A_{r,s}| = \max_{\substack{p \le i \le m \\ p \le j \le m}} |A_{i,j}|.$$

En otras palabras, se busca el máximo entre los números $|A_{i,j}|$ con $p \le i \le m$ y $p \le j \le m$. En el ejemplo de arriba, se busca el máximo entre los valores absolutos de todas las entradas marcadas con verde:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 9 & -7 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 6 & -4 & -8 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & -7 & 7 & -2 & -7 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -6 & -3 & -5 \end{array}\right].$$

En este ejemplo $p = 2$ y $(r, s) = (2, 5)$, porque el máximo es $|A_{2,5}| = 8$.

Si $(r, s) \neq (p, p)$, entonces se intercambian los renglones y las columnas de tal manera que la entrada $A_{r,s}$ se pone en la posición (p, p). En el programa, en vez de intercambiar las columnas de manera explícita se usa un vector auxiliar que guarda la permutación de las columnas.

Ejercicios numéricos

6. Obtenga los intercambios de filas que se requieren en el primer paso del método de Gauss con el pivoteo parcial y con el pivoteo parcial escalado:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & 7; \\ 10x_1 & & & + & 20x_3 & = & 6; \\ 5x_1 & & & - & x_3 & = & 4. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1; \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 2; \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 3. \end{array}\right.$$

7. Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones lineales usando pivotes diagonales y haciendo los cálculos en la aritmética con redondeo al más cercano con 3 dígitos (en otras palabras, con 2 dígitos después del punto flotante). Luego resolver el mismo sistema usando el pivoteo parcial.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3.00 \cdot 10^{-3}\, x_1 & + & 6.11\, x_2 & = & 6.14; \\ 7.00\, x_1 & - & 3.00 \cdot 10^{1}\, x_2 & = & 4.00 \cdot 10^{1}. \end{array}\right.$$

8. Ejemplo cuando la eliminación con pivotes diagonales lleva a errores de redondeo muy grandes. Resolver el sistema usando calculos con 3 dígitos con redondeo al más cercano:

$$\begin{cases} 3.00 \cdot 10^{-3}\, x_1 & + & 6.11\, x_2 & = & 6.14; \\ 7.00\, x_1 & - & 3.00 \cdot 10^1\, x_2 & = & 4.00 \cdot 10^1. \end{cases}$$

La solución exacta es $x_1 = 1.00 \cdot 10^1$, $x_2 = 1.00$. Cálculos con tres dígitos:

$$\mu = -\frac{7.00}{3.00 \cdot 10^{-3}} = -2.(3) \cdot 10^3 \approx -2.33 \cdot 10^3;$$

Apliquemos la operación $R_2 + = -2.33 \cdot 10^3\, R_1$.

$$\begin{aligned} -2.33 \cdot 10^3 \cdot 6.11 &= -1.42363 \cdot 10^4 \approx -1.42 \cdot 10^4; \\ -1.42 \cdot 10^4 - 3.00 \cdot 10^1 &= -1.423 \cdot 10^4 \approx -1.42 \cdot 10^4; \\ -2.33 \cdot 10^3 \cdot 6.14 &= -1.43062 \cdot 10^4 \approx -1.43 \cdot 10^4; \\ -1.43 \cdot 10^4 + 4.00 \cdot 10^1 &= -1.426 \cdot 10^4 \approx -1.43 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

Se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3.00 \cdot 10^{-3}\, x_1 & + & 6.11\, x_2 & = & 6.14; \\ & - & 1.42 \cdot 10^4\, x_2 & = & -1.43 \cdot 10^4. \end{cases}$$

Calculamos $\tilde{x}_2$ y $\tilde{x}_1$ (los valores aproximados de x_2 y x_1):

$$\begin{aligned} \tilde{x}_2 &= \frac{-1.43 \cdot 10^4}{-1.42 \cdot 10^4} \approx 1.00704 \approx 1.01; \\ 6.11 \cdot 1.01 &= 6.1711 \approx 6.17; \\ 6.14 - 6.17 &= -3.00 \cdot 10^{-2}; \\ \tilde{x}_1 &= \frac{-3.00 \cdot 10^{-2}}{3.00 \cdot 10^{-3}} = -1.00 \cdot 10^1. \end{aligned}$$

En vez de la solución exacta

$$x_1 = 1.00 \cdot 10^1, \qquad x_2 = 1$$

obtuvimos la solución

$$\tilde{x}_1 = -1.00 \cdot 10^1, \qquad \tilde{x}_2 = 1.01.$$

9. Ejemplo cuando la eliminación gaussiana con pivoteo parcial funciona mal.

$$\begin{cases} 3.00 \cdot 10^5\, x_1 & + & 6.11 \cdot 10^8\, x_2 & = & 6.14 \cdot 10^8; \\ 7.00\, x_1 & - & 3.00 \cdot 10^1\, x_2 & = & 4.00 \cdot 10^1. \end{cases}$$

Sugerencias para programar los algoritmos

10. Algoritmo Reduce2 (con pivoteo parcial).

```
Entrada: matriz A de tamaño m por n con m <= n;
Variables locales: B, m, n, p, i, j;
B := una copia de A;
m := el número de renglones de A;
n := el número de columnas de A;
Para p := 1, ..., m - 1:
  imax := el primer índice i en {p, ..., m},
      donde |B[i, p]| alcanza su máximo;
  Si imax != p:
    Para j := p, ..., n:
      B[imax, j] <--> B[p, j]
  Para i := p + 1, ..., m:
    mu := - B[i, p] / B[p, p];
    B[i, p] := 0;
    Para j := p + 1, ..., n:
      B[i, j] := B[i, j] - mu * B[p, j];
Salida: B.
```

11. Algoritmo para buscar el índice de la máxima entrada.

```
L = {2,-5,7,1,4}
imax = 1;
Do[If[L[[i]] > L[[imax]], imax = i], {i, Length[L]}];
imax
```