Matrices de permutaciones

Egor Maximenko
con correcciones de Román Higuera García

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

5 de diciembre de 2014

Contenido

Objetivos y requisitos

Repaso rápido

- Permutaciones
- Multiplicación de matrices
- Delta de Kronecker

Matrices de permutaciones

Multiplicación de matrices de permutaciones

Matrices que intercambian dos renglones

Contenido

Objetivos y requisitos

Repaso rápido

- Permutaciones
- Multiplicación de matrices
- Delta de Kronecker

Matrices de permutaciones

- Multiplicación de matrices de permutaciones
- Matrices que intercambian dos renglones

¿Qué aprenderemos?

1. Escribir en la forma explícita la matriz de permutación asociada a la permutación dada:

$$P_{3,2,4,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Dada una matriz de permutación en la forma explícita, escribir la permutación correspondiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{2,3,1,4}.$$

¿Qué aprenderemos?

3. Multiplicar una matriz de permutación por un vector:

$$P_{4,1,3,2}\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

4. Multiplicar una matriz de permutación por una matriz:

$$P_{3,1,4,2}\begin{bmatrix} -3 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ -5 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -3 & 7 & 1 & 5 \\ -5 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

¿Qué aprenderemos?

5. Multiplicar dos matrices de permutación:

$$P_{3,1,4,5,2}P_{5,3,2,4,1} = P_{2,5,4,1,3}.$$

6. Demostar la fórmula para el producto de dos matrices de permutación:

$$P_{\varphi}P_{\psi} = P_{\psi\varphi}.$$

7. Multiplicar una matriz de intercambio de dos renglones por una matriz de permutación:

$$E_{2\leftrightarrow 4}P_{3,1,5,2,4} = P_{3,2,5,1,4}.$$

¿Qué se necesita para comprender bien la presentación?

- Permutaciones, multiplicación de permutaciones.
- Notación para vectores y matrices, multiplicación de matrices.
- Delta de Kronecker, sumas con la delta de Kronecker.

Resolver ejercicios simples incluidos en la presentación

Para aprender a jugar el fútbol,
no es suficiente sólo ver partidos por la televisión.

Esta presentación incluye varios ejercicios simples.
Se recomienda resolver cada ejercicio en papel
antes de continuar con la presentación.

Contenido

Objetivos y requisitos

Repaso rápido

- **Permutaciones**
- Multiplicación de matrices
- Delta de Kronecker

Matrices de permutaciones

Multiplicación de matrices de permutaciones

Matrices que intercambian dos renglones

Ejemplos de permutaciones

La función (mapeo, aplicación) $\varphi\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ definida mediante la siguiente regla es una permutación del conjunto $\{1,2,3,4\}$:

$$\varphi(1) = 3, \qquad \varphi(2) = 2, \qquad \varphi(3) = 4, \qquad \varphi(4) = 1.$$

Por lo común se usa alguna notación más concisa:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \; = \; (3,2,4,1).$$

Otra permutación del conjunto $\{1,2,3,4\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definición de permutaciones

Una permutación del conjunto $\{1, \dots, n\}$
es una función biyectiva $\{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$.

Biyectiva significa inyectiva y suprayectiva.
Por ejemplo, la función $\varphi\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ definida por

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

es inyectiva porque $3, 2, 4, 1$ son diferentes a pares,
y es suprayectiva porque $3, 2, 4, 1$ son todos los elementos de $\{1, 2, 3, 4\}$.

En realidad, aquí sería suficiente exigir cualquiera de estas dos propiedades,
y la otra se cumpliría automáticamente.

Ejemplos

Las siguientes dos funciones son permutaciones del conjunto $\{1,2,3,4,5\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Las siguientes dos funciones mandan $\{1,2,3,4,5\}$ en $\{1,2,3,4,5\}$, pero no son permutaciones del conjunto $\{1,2,3,4,5\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios

Complete la definición de φ de tal manera
que φ sea una permutación del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Se recomienda escribir la respuesta en papel antes de continuar.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 5 & ? \end{pmatrix}.$$

Ejercicios

Complete la definición de φ de tal manera
que φ sea una permutación del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Se recomienda escribir la respuesta en papel antes de continuar.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios

Complete la definición de φ de tal manera
que φ sea una permutación del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Se recomienda escribir la respuesta en papel antes de continuar.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encuentre los valores de la función φ en los elementos 1 y 4.
Se recomienda escribir la respuesta en papel antes de continuar.

$$\varphi(1) = \quad , \qquad \varphi(4) = \quad .$$

Ejercicios

Complete la definición de φ de tal manera
que φ sea una permutación del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Se recomienda escribir la respuesta en papel antes de continuar.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encuentre los valores de la función φ en los elementos 1 y 4.
Se recomienda escribir la respuesta en papel antes de continuar.

$$\varphi(1) = 3, \qquad \varphi(4) = 5.$$

El conjunto de las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$

Se denota por S_n el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Por ejemplo, el conjunto S_3 consiste de 6 permutaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El conjunto de las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$

Se denota por S_n el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Por ejemplo, el conjunto S_3 consiste de 6 permutaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escriba todos los elementos del conjunto S_2, es decir,
todas las permutaciones del conjunto $\{1, 2\}$:

El conjunto de las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$

Se denota por S_n el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Por ejemplo, el conjunto S_3 consiste de 6 permutaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escriba todos los elementos del conjunto S_2, es decir,
todas las permutaciones del conjunto $\{1, 2\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicación de permutaciones

Definición (el producto de dos permutaciones)

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. El producto $\varphi\psi$ se define como la composición $\varphi \circ \psi$. En otras palabras, la función $\varphi\psi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ se define mediante la regla:

$$(\varphi\psi)(j) \coloneqq \varphi(\psi(j)) \qquad (j \in \{1, \ldots, n\}).$$

Por ejemplo, si

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

entonces

$$(\varphi\psi)(1) = \varphi(\psi(1)) = \varphi(2) = 5, \quad (\varphi\psi)(2) = \varphi(\psi(2)) = \varphi(4) = 1, \quad \ldots$$

Resultado:

$$\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Multiplicación de permutaciones, otro ejemplo

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para calcular $(\varphi\psi)(3)$, uno puede pensar según el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\varphi"'] & 2 \arrow[d, "\varphi"'] & 3 \arrow[d, "\varphi"'] & 4 \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbf{5} \arrow[d, "\varphi"'] & 6 \arrow[d, "\varphi"'] & & 1 \arrow[d, "\psi"'] & 2 \arrow[d, "\psi"'] & \mathbf{3} \arrow[d, "\psi"'] & 4 \arrow[d, "\psi"'] & 5 \arrow[d, "\psi"'] & 6 \arrow[d, "\psi"'] \\
3 & 1 & 6 & 4 & \mathbf{2} & 5 & & 6 & 3 & \mathbf{5} & 1 & 2 & 4
\end{tikzcd}$$

Escriba en papel el producto $\varphi\psi$:

$$\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & 2 & & & \end{pmatrix}.$$

Multiplicación de permutaciones, otro ejemplo

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Para calcular $(\varphi\psi)(3)$, uno puede pensar según el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \mathbf{5} & 6 \\ \varphi\big\downarrow & \varphi\big\downarrow & \varphi\big\downarrow & \varphi\big\downarrow & \varphi\big\downarrow & \varphi\big\downarrow \\ 3 & 1 & 6 & 4 & \mathbf{2} & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \mathbf{3} & 4 & 5 & 6 \\ \psi\big\downarrow & \psi\big\downarrow & \psi\big\downarrow & \psi\big\downarrow & \psi\big\downarrow & \psi\big\downarrow \\ 6 & 3 & \mathbf{5} & 1 & 2 & 4 \end{array}$$

Escriba en papel el producto $\varphi\psi$:

$$\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

La inversa de una permutación

Por definición, cada permutación φ es una función invertible.
La permutación inversa φ^{-1} es la función inversa de φ.

Por ejemplo, si $\quad \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces

$$\varphi(1) = 3, \quad \varphi(2) = 5, \quad \varphi(3) = 4, \quad \varphi(4) = 1, \quad \varphi(5) = 2.$$

De allí

$$\varphi^{-1}(3) = 1, \quad \varphi^{-1}(5) = 2, \quad \varphi^{-1}(4) = 3, \quad \varphi^{-1}(1) = 4, \quad \varphi^{-1}(2) = 5.$$

Hemos construido la permutación inversa de φ:

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Transposiciones (ciclos de dos elementos)

Definición

Sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$.
Denotemos por $\tau_{p,q}^{(n)}$ a la permutación del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ que intercambia p y q y deja inmovibles los demás elementos.
Escribimos simplemente $\tau_{p,q}$ cuando n se deduce del contexto.

Ejemplos (en S_6):

$$\tau_{3,5} = \tau_{3,5}^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{1,4} = \tau_{1,4}^{(6)} =$$

Transposiciones (ciclos de dos elementos)

Definición

Sean $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$.
Denotemos por $\tau_{p,q}^{(n)}$ a la permutación del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ que intercambia p y q y deja inmovibles los demás elementos.
Escribimos simplemente $\tau_{p,q}$ cuando n se deduce del contexto.

Ejemplos (en S_6):

$$\tau_{3,5} = \tau_{3,5}^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\tau_{1,4} = \tau_{1,4}^{(6)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Multiplicación de una permutación por una transposición

Ejemplo

Sea

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Haga el siguiente cálculo en papel:

$$\begin{aligned} \varphi\tau_{2,4} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ & & & & & \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Multiplicación de una permutación por una transposición

Ejemplo

Sea

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

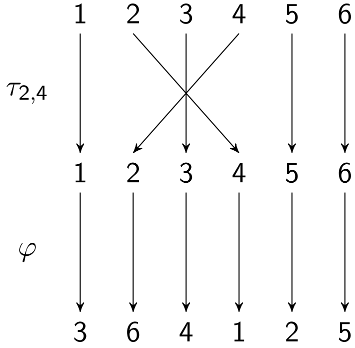
Haga el siguiente cálculo en papel:

$$\begin{aligned} \varphi\tau_{2,4} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Al comparar $\varphi\tau_{2,4}$ con φ vemos que
se hizo un intercambio de los valores $\varphi(2)$ y $\varphi(4)$.

Multiplicación de una permutación por una transposición

El mismo ejemplo



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \tau_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & \color{red}{1} & 4 & \color{red}{6} & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcule los siguientes productos
(escriba las respuestas en papel antes de continuar):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \tau_{1,3} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tau_{3,4} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \tau_{1,6} =$$

Multiplicación de permutaciones por transposiciones

Ejercicios

Calcule los siguientes productos
(escriba las respuestas en papel antes de continuar):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \tau_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \tau_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \tau_{1,6} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Contenido

Importancia de notación

En el siglo XVI fue inventado el simbolismo algebraico:

El cuadrado de la suma de dos términos
es igual al cuadrado del primer término
más el doble producto de ambos términos
más el cuadrado del segundo término.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Notación para construir vectores

la tupla de longitud n

cuya k-ésima componente es igual a $\frac{k}{k+1}$

para cada índice k desde 1 hasta n

$$\downarrow$$

$$\left[\,\frac{k}{k+1}\,\right]_{k=1}^{n}$$

Notación para construir vectores

la tupla de longitud n

cuya k-ésima componente es igual a $\frac{k}{k+1}$

para cada índice k desde 1 hasta n

$$\downarrow$$

$$\left[\frac{k}{k+1} \right]_{k=1}^{n}$$

Por ejemplo,

$$\left[\frac{k}{k+1} \right]_{k=1}^{3} =$$

Notación para construir vectores

la tupla de longitud n

cuya k-ésima componente es igual a $\frac{k}{k+1}$

para cada índice k desde 1 hasta n

$$\downarrow$$

$$\left[\,\frac{k}{k+1}\,\right]_{k=1}^{n}$$

Por ejemplo,

$$\left[\,\frac{k}{k+1}\,\right]_{k=1}^{3} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 3/4 \end{bmatrix}.$$

Notación para las componentes de vectores en $\mathbb{R}^3$

Dado un vector $v \in \mathbb{R}^3$, denotamos sus componentes por v_1, v_2, v_3:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Esta notación es muy general.
Si el vector se llama ☺, entonces sus componentes son $☺_1$, $☺_2$, $☺_3$:

$$☺ = \begin{bmatrix} ☺_1 \\ ☺_2 \\ ☺_3 \end{bmatrix}.$$

Notación para las componentes de vectores en $\mathbb{R}^3$

Escriba la segunda componente del vector $a \boxtimes (b \ltimes c)$:

?

Aquí no es necesario saber el sentido de los signos $\boxtimes$ y $\ltimes$.

Notación para las componentes de vectores en $\mathbb{R}^3$

Escriba la segunda componente del vector $a \boxtimes (b \ltimes c)$:

$$(a \boxtimes (b \ltimes c))_2.$$

Aquí no es necesario saber el sentido de los signos $\boxtimes$ y $\ltimes$.

Notación para vectores en $\mathbb{R}^n$

Dado un vector $v \in \mathbb{R}^n$, denotemos por v_j su j-ésima componente.

Dos vectores u y v se llaman iguales si son de la misma longitud (digamos n) y para cada índice j sus j-ésimas componentes son iguales:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad u_j = v_j.$$

Notación para matrices

Denotemos por $\mathcal{M}_{m\times n}$ al conjunto de todas las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas reales. Si A es una matriz, entonces denotemos su entrada (j, k) por $A_{j,k}$. Por ejemplo, si $☼ \in \mathcal{M}_{2\times 3}$, entonces

$$☼ = \begin{bmatrix} ☼_{1,1} & ☼_{1,2} & ☼_{1,3} \\ ☼_{2,1} & ☼_{2,2} & ☼_{2,3} \end{bmatrix}.$$

Si $(P \circledast Q)^\dagger \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, entonces

$$(P \circledast Q)^\dagger = \begin{bmatrix} ((P \circledast Q)^\dagger)_{1,1} & ((P \circledast Q)^\dagger)_{1,2} \\ ((P \circledast Q)^\dagger)_{2,1} & ((P \circledast Q)^\dagger)_{2,2} \end{bmatrix}.$$

A veces es necesario definir una matriz mediante una fórmula para sus componentes:

$$\left[10j + k^2\right]_{j,k=1}^{2,3} = \begin{bmatrix} 11 & 14 & 19 \\ 21 & 24 & 29 \end{bmatrix}.$$

Notación para los renglones de una matriz

Dada una matriz A, denotemos por $A_{j,*}$ a su renglón j.
Por ejemplo, si $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_{2,*} = \begin{bmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Notación para los renglones de una matriz

Dada una matriz A, denotemos por $A_{j,*}$ a su renglón j.
Por ejemplo, si $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_{2,*} = \begin{bmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Dada una matriz B, escriba $B_{3,*}$:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B_{3,*} =$$

Notación para los renglones de una matriz

Dada una matriz A, denotemos por $A_{j,*}$ a su renglón j.
Por ejemplo, si $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_{2,*} = \begin{bmatrix} A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Dada una matriz B, escriba $B_{3,*}$:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B_{3,*} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Producto de una matriz por un vector (ejemplo)

Consideremos una matriz general $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ y un vector general $b \in \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Escriba el producto Ab, luego escriba por separado las componentes de Ab:

$$Ab = \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} (Ab)_1 &= A_{1,1}b_1 + A_{1,2}b_2 + A_{1,3}b_3 = \sum_{k=1}^{3} A_{1,k}b_k; \\ (Ab)_2 &= ? \end{aligned}$$

Generalizando estas expresiones escriba una fórmula para $(Ab)_j$:

$$(Ab)_j = \sum_{k=?}^{?} A_{?,?}b_? \qquad (j \in \{1,2\}).$$

Producto de una matriz por un vector (definición formal)

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Entonces Ab se define como

$$Ab = \left[\sum_{k=1}^{n} A_{j,k} b_k \right]_{j=1}^{m}.$$

En otras palabras, $Ab \in \mathbb{R}^m$,
y las componentes de Ab se calculan por la siguiente fórmula:

$$(Ab)_j = \sum_{k=1}^{n} A_{j,k} b_k \qquad (j \in \{1, \ldots, m\}).$$

Producto de dos matrices (ejemplo)

Sean $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}$, $B \in \mathcal{M}_{2\times 4}$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & B_{2,4} \end{bmatrix}.$$

Entonces $AB \in \mathcal{M}_{?\times ?}$. Calcule la matriz AB y escriba por separado sus siguientes entradas:

$$(AB)_{2,3} = A_{2,1}B_{1,3} + A_{2,2}B_{2,3} = \sum_{k=1}^{2} A_{2,k}B_{k,3};$$

$$(AB)_{1,4} = ?$$

$$(AB)_{2,1} = ?$$

Escriba la fórmula general para $(AB)_{i,j}$.

Producto de dos matrices (definición formal)

Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$. Entonces AB se define como

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j} \right]_{i,j=1}^{m,p}.$$

En otras palabras, $AB \in \mathcal{M}_{m\times p}$,
y las entradas de AB se calculan mediante la siguiente regla:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j} \qquad (i \in \{1,\ldots,m\},\ j \in \{1,\ldots,p\}).$$

Contenido

Delta de Kronecker

La función $\delta\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ está definida mediante la regla:

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 1, & \text{si } p = q; \\ 0, & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$\delta_{3,5} = 0, \qquad \delta_{7,7} = 1, \qquad \delta_{-1,6} = 0, \qquad \delta_{-2,-2} = 1.$$

Delta de Kronecker

La función $\delta\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ está definida mediante la regla:

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 1, & \text{si } p = q; \\ 0, & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$\delta_{3,5} = 0, \qquad \delta_{7,7} = 1, \qquad \delta_{-1,6} = 0, \qquad \delta_{-2,-2} = 1.$$

Evalue la delta de Kronecker en los pares dados
(escriba las respuestas en papel antes de continuar):

$$\delta_{4,4} = \;?\;, \qquad \delta_{2,3} = \;?\;, \qquad \delta_{-6,-6} = \;?\;, \qquad \delta_{-5,4} = \;?\;.$$

Delta de Kronecker

La función $\delta\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ está definida mediante la regla:

$$\delta_{p,q} = \begin{cases} 1, & \text{si } p = q; \\ 0, & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$\delta_{3,5} = 0, \qquad \delta_{7,7} = 1, \qquad \delta_{-1,6} = 0, \qquad \delta_{-2,-2} = 1.$$

Evalue la delta de Kronecker en los pares dados
(escriba las respuestas en papel antes de continuar):

$$\delta_{4,4} = 1, \qquad \delta_{2,3} = 0, \qquad \delta_{-6,-6} = 1, \qquad \delta_{-5,4} = 0.$$

Ejemplo de una suma con la delta de Kronecker

En la siguiente suma sobrevive sólo el sumando con el índice j igual a 4:

$$\sum_{j=1}^{5} \delta_{j,4} a_j = \underbrace{\delta_{1,4}}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_1 + \underbrace{\delta_{2,4}}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_2 + \underbrace{\delta_{3,4}}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_3 + \underbrace{\delta_{4,4}}_{\substack{\parallel \\ 1}} a_4 + \underbrace{\delta_{5,4}}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_5 = a_4.$$

Podemos llegar a la misma respuesta con un razonamiento más formal ("separar las moscas de las albóndigas"):

$$\sum_{j=1}^{5} \delta_{j,4} a_j = \sum_{j\in\{4\}} \underbrace{\delta_{j,4}}_{\substack{\parallel \\ 1}} a_j + \sum_{j\in\{1,2,3,5\}} \underbrace{\delta_{j,4}}_{\substack{\parallel \\ 0}} a_j = 1 \cdot a_j + 0 = a_j.$$

Ejercicios simples con sumas de Kronecker

Para cada una de las siguientes sumas
escriba en papel los razonamientos y la respuesta:

$$\sum_{j=1}^{4} \delta_{j,3} 2^j = \sum_{j\in\{3\}} \underbrace{\delta_{j,3}}_{\substack{\parallel \\ ?}} 2^j + \sum_{j\in\{1,2,4\}} \underbrace{\delta_{j,3}}_{\substack{\parallel \\ ?}} 2^j = ?$$

$$\sum_{k=1}^{4} \delta_{k,2} b_k = ?$$

$$\sum_{p=1}^{5} \delta_{p,5} c_p = ?$$

$$\sum_{q=1}^{4} \delta_{q,3} d_q = ?$$

Ejercicios simples con sumas de Kronecker

Para cada una de las siguientes sumas
escriba en papel los razonamientos y la respuesta:

$$\sum_{j=1}^{4} \delta_{j,3} 2^j = \sum_{j\in\{3\}} \underbrace{\delta_{j,3}}_{\substack{\| \\ 1}} 2^j + \sum_{j\in\{1,2,4\}} \underbrace{\delta_{j,3}}_{\substack{\| \\ 0}} 2^j = 8,$$

$$\sum_{k=1}^{4} \delta_{k,2} b_k = b_2,$$

$$\sum_{p=1}^{5} \delta_{p,5} c_p = c_5,$$

$$\sum_{q=1}^{4} \delta_{q,3} d_q = d_3.$$

Fórmula para las sumas con la delta de Kronecker

Proposición

Si $a_1, \ldots, a_n$ son algunos números y $p \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{j,p} a_j = a_p.$$

Demostración:

$$\sum_{j=1}^{p} \delta_{j,p} a_j = \sum_{j \in \{p\}} \underbrace{\delta_{j,p}}_{\substack{\| \\ 1}} a_j + \sum_{j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{p\}} \underbrace{\delta_{j,p}}_{\substack{\| \\ 0}} a_j = 1 \cdot a_p + 0 = a_p.$$

Contenido

Objetivos y requisitos

Repaso rápido

- Permutaciones
- Multiplicación de matrices
- Delta de Kronecker

Matrices de permutaciones

- Multiplicación de matrices de permutaciones
- Matrices que intercambian dos renglones

Ejemplo de una matriz de permutación

A cada permutación φ del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ le vamos a asociar mediante cierta regla una matriz $n \times n$. Por ejemplo,

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad P_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lo escribiremos de manera más breve:

$$P_{4,1,3,2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplos de matrices de permutación

$$P_{2,5,3,1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_{2,1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_{2,4,1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_{3,1,2,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Antes de pasar a la siguiente página, escriba la siguiente matriz:

$$P_{2,3,4,1} =$$

Ejemplos de matrices de permutación

$$P_{2,5,3,1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_{2,1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_{2,4,1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_{3,1,2,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Antes de pasar a la siguiente página, escriba la siguiente matriz:

$$P_{2,3,4,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Hacia la fórmula para la matriz de permutación

Queremos escribir una fórmula general para las entradas de P_φ.
Consideremos un ejemplo:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entre las entradas del primer renglón de A solamente una es igual a 1, y las demás son nulas.

$$(P_\varphi)_{1,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = 2, \\ 0, & \text{si } j \neq 2 \end{cases} = \delta_{2,j} = \delta_{\varphi(1),j}.$$

Verifique que

$$(P_\varphi)_{2,j} = \delta_{3,j} = \delta_{\varphi(2),j}, \qquad (P_\varphi)_{3,j} = \delta_{1,j} = \delta_{\varphi(3),j}.$$

Escriba una fórmula general para $(P_\varphi)_{i,j}$.

Matrices de permutación

Definición formal

Definición

Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$P_\varphi = \left[\delta_{\varphi(i),j}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

En otras palabras, $P_\varphi \in \mathcal{M}_{n\times n}$, y

$$(P_\varphi)_{i,j} = \delta_{\varphi(i),j} \qquad (i,j \in \{1,\ldots,n\}).$$

Producto de una matriz de permutación por un vector

Ejemplo

Sea $v \in \mathbb{R}^4$ y sea

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcule el producto $P_\varphi v$:

$$P_{3,1,4,2} v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = ?$$

Escriba por separado las componentes del vector $P_\varphi v$:

$$(P_\varphi v)_1 = v_?, \quad (P_\varphi v)_2 = v_?, \quad (P_\varphi v)_3 = v_?, \quad (P_\varphi v)_4 = v_?.$$

Encuentre una fórmula general. Sugerencia: $(P_\varphi v)_i = v_{\varphi(?)}$.

Producto de una matriz de permutación por un vector

Fórmula general

Proposición

Sean $\varphi \in S_n$, $v \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$P_\varphi v = \left[v_{\varphi(i)} \right]_{i=1}^{n}.$$

En otras palabras, $P_\varphi v \in \mathbb{R}^n$, y

$$(P_\varphi v)_i = v_{\varphi(i)} \qquad (i \in \{1, \ldots, n\}).$$

Demostración.

$$(P_\varphi v)_i = \sum_{j=1}^{n} (P_\varphi)_{i,j} v_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_{\varphi(i),j} v_j = v_{\varphi(i)}.$$

Producto de una matriz de permutación por una matriz

Ejemplo

Sea $\varphi = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{array} \right)$ y sea A una matriz general de clase $\mathcal{M}_{5\times 2}$.

Entonces

$$P_\varphi A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \\ A_{4,1} & A_{4,2} \\ A_{5,1} & A_{5,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{4,1} & A_{4,2} \\ A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{5,1} & A_{5,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Producto de una matriz de permutación por una matriz

Fórmula general

Proposición

Sea $\varphi \in S_m$ y sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Entonces

$$P_\varphi A = \left[A_{\varphi(p),q}\right]_{p,q=1}^{m,n}.$$

En otras palabras, $P_\varphi A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, y

$$(P_\varphi A)_{p,q} = A_{\varphi(p),q} \qquad (p \in \{1,\ldots,m\},\ q \in \{1,\ldots,n\}).$$

Demostración.

$$(P_\varphi A)_{p,q} = \sum_{k=1}^{m} (P_\varphi)_{p,k} A_{k,q} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{\varphi(p),k} A_{k,q} = A_{\varphi(p),q}.$$

Producto de una matriz de permutación por una matriz

Ejercicios

Calcule los siguientes productos en papel antes de continuar:

$$P_{3,1,4,2} \begin{bmatrix} -7 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$P_{2,4,3,1} \begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & -4 \\ 7 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix} =$$

Producto de una matriz de permutación por una matriz

Ejercicios

Calcule los siguientes productos en papel antes de continuar:

$$P_{3,1,4,2}\begin{bmatrix} -7 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -7 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

$$P_{2,4,3,1}\begin{bmatrix} -5 & 7 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & -4 \\ 7 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & -4 \\ 3 & 7 & -1 & -2 \\ 7 & 2 & -1 & 0 \\ -5 & 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre una permutación $\varphi \in S_5$ tal que

$$P_\varphi \begin{bmatrix} 2 & 7 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -7 & 9 \\ -2 & -5 & 5 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 9 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & -5 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & -2 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Escriba la respuesta en papel antes de continuar.

Producto de una matriz de permutación por una matriz
Ejercicios

Encuentre una permutación $\varphi \in S_5$ tal que

$$P_\varphi \begin{bmatrix} 2 & 7 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -7 & 9 \\ -2 & -5 & 5 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 9 & 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & -5 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & -2 & -2 \\ 6 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & -7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Escriba la respuesta en papel antes de continuar.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Producto de una matriz por una matriz de permutación

Ejemplo

Multipliquemos $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}$ por P_φ, donde $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$:

$$AP_{2,4,1,3} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{1,3} & A_{1,1} & A_{1,4} & A_{1,2} \\ A_{2,3} & A_{2,1} & A_{2,4} & A_{2,2} \\ A_{3,3} & A_{3,1} & A_{3,4} & A_{3,2} \end{bmatrix}.$$

El producto $B = AP_{2,4,1,3}$ se obtiene de la matriz original A al cambiar el orden de columnas, por ejemplo,

$$B_{*,1} = A_{*,3} = A_{*,\varphi^{-1}(1)}.$$

Producto de una matriz por una matriz de permutación

Fórmula general

Proposición

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$AP_\varphi = \left[A_{i,\varphi^{-1}(j)}\right]_{i,j=1}^{m,n},$$

esto es, $AP_\varphi \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y

$$(AP_\varphi)_{i,j} = A_{i,\varphi^{-1}(j)} \qquad (i \in \{1,\ldots,m\},\ j \in \{1,\ldots,n\}).$$

Producto de una matriz por una matriz de permutación

Ejercicios

Escriba los siguientes productos en papel antes de continuar.

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 7 & 2 & 3 & -2 \\ 6 & 4 & -8 & 7 & -8 \end{bmatrix} P_{3,5,1,4,2} =$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & 7 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 9 & 1 & -2 \\ 7 & 4 & -6 & -3 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} P_{4,2,5,3,1} =$$

Producto de una matriz por una matriz de permutación

Ejercicios

Escriba los siguientes productos en papel antes de continuar.

$$\begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 7 & 2 & 3 & -2 \\ 6 & 4 & -8 & 7 & -8 \end{bmatrix} P_{3,5,1,4,2} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 7 \\ -8 & -8 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & 7 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & 9 & 1 & -2 \\ 7 & 4 & -6 & -3 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} P_{4,2,5,3,1} = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 3 & 9 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 4 & -3 & 7 & -6 \\ 2 & 8 & -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Producto de matriz por una matriz de permutación

Ejercicios

Encuentre una permutación $\varphi \in S_5$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & -6 & 0 & -3 \\ -2 & 7 & -8 & -1 & 8 \end{bmatrix} P_\varphi = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 & -2 & 2 \\ 2 & -8 & 6 & 7 & 0 \\ -6 & -3 & 4 & 0 & -5 \\ -8 & 8 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Escriba la respuesta en papel antes de continuar.

Encuentre una permutación $\varphi \in S_5$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & -6 & 0 & -3 \\ -2 & 7 & -8 & -1 & 8 \end{bmatrix} P_\varphi = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -7 & -2 & 2 \\ 2 & -8 & 6 & 7 & 0 \\ -6 & -3 & 4 & 0 & -5 \\ -8 & 8 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Escriba la respuesta en papel antes de continuar.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Contenido

Producto de dos matrices de permutación

Ejemplo

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P_\varphi P_\psi = P_{4,1,5,2,3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \psi\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Adivine la fórmula general para $P_\varphi P_\psi$.

Producto de dos matrices de permutación

Fórmula general

Teorema

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces
$$P_\varphi P_\psi = P_{\psi\varphi}.$$

Producto de dos matrices de permutación

Fórmula general

Teorema

Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces
$$P_\varphi P_\psi = P_{\psi\varphi}.$$

Vamos a demostrar la fórmula. Tenemos que verificar dos cosas:

1. Las matrices $P_\varphi P_\psi$ y $P_{\psi\varphi}$ son del mismo tamaño.
2. Para cada par de índices p y q,
   las matrices $P_\varphi P_\psi$ y $P_{\psi\varphi}$ tienen la misma entrada (p, q):

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} = (P_{\psi\varphi})_{p,q}.$$

Demostración: $P_\varphi P_\psi$ y $P_{\psi\varphi}$ son del mismo tamaño

$$
\begin{tikzcd}
 & & \varphi \in S_n \arrow[dl] \arrow[ddr] & & \\
 & P_\varphi \in \mathcal{M}_{n\times n} \arrow[dl] & & & \\
P_\varphi P_\psi \in \mathcal{M}_{n\times n} & & & \varphi\psi \in S_n \arrow[r] & P_{\psi\varphi} \in \mathcal{M}_{n\times n} \\
 & P_\psi \in \mathcal{M}_{n\times n} \arrow[ul] & & & \\
 & & \psi \in S_n \arrow[ul] \arrow[uur] & &
\end{tikzcd}
$$

Demostración: $\forall p, q \in \{1, \ldots, n\} \quad (P_\varphi P_\psi)_{p,q} = (P_{\psi\varphi})_{p,q}$

$(P_\varphi P_\psi)_{p,q}$

Demostración: $\forall p, q \in \{1, \ldots, n\} \quad (P_\varphi P_\psi)_{p,q} = (P_{\psi\varphi})_{p,q}$

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} \xlongequal{\text{(i)}} \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q}$$

Justificación de los pasos:

(i) definición del producto de dos matrices

Demostración: $\forall p, q \in \{1, \ldots, n\} \quad (P_\varphi P_\psi)_{p,q} = (P_{\psi\varphi})_{p,q}$

$$(P_\varphi P_\psi)_{p,q} \overset{\text{(i)}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} \delta_{\varphi(p),k} \delta_{\psi(k),q}$$

Justificación de los pasos:

(i) definición del producto de dos matrices

(ii) definición de la matriz de permutación

Demostración: $\forall p, q \in \{1, \ldots, n\} \quad (P_\varphi P_\psi)_{p,q} = (P_{\psi\varphi})_{p,q}$

$$
\begin{aligned}
(P_\varphi P_\psi)_{p,q} &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} \delta_{\varphi(p),k} \delta_{\psi(k),q} \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \sum_{k \in \{p\}} \underbrace{\delta_{\varphi(p),k}}_{1} \delta_{\psi(k),q} + \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{p\}} \underbrace{\delta_{\varphi(p),k}}_{0} \delta_{\psi(k),q}
\end{aligned}
$$

Justificación de los pasos:

(i) definición del producto de dos matrices

(ii) definición de la matriz de permutación

(iii) dividimos la suma en dos partes para simplificar $\delta_{\varphi(p),k}$

Demostración: $\forall p, q \in \{1, \ldots, n\} \quad (P_\varphi P_\psi)_{p,q} = (P_{\psi\varphi})_{p,q}$

$$
\begin{aligned}
(P_\varphi P_\psi)_{p,q} &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} \delta_{\varphi(p),k}\delta_{\psi(k),q} \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \sum_{k\in\{p\}} \underbrace{\delta_{\varphi(p),k}}_{1} \delta_{\psi(k),q} + \sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{p\}} \underbrace{\delta_{\varphi(p),k}}_{0} \delta_{\psi(k),q} \\
&\overset{\text{(iv)}}{=\!=} \delta_{\psi(\varphi(p)),q}
\end{aligned}
$$

Justificación de los pasos:

(i) definición del producto de dos matrices

(ii) definición de la matriz de permutación

(iii) dividimos la suma en dos partes para simplificar $\delta_{\varphi(p),k}$

(iv) definición de la δ de Kronecker

Demostración: $\forall p, q \in \{1, \dots, n\} \quad (P_\varphi P_\psi)_{p,q} = (P_{\psi\varphi})_{p,q}$

$$
\begin{aligned}
(P_\varphi P_\psi)_{p,q} &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} \delta_{\varphi(p),k} \delta_{\psi(k),q} \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \sum_{k \in \{p\}} \underbrace{\delta_{\varphi(p),k}}_{1} \delta_{\psi(k),q} + \sum_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{p\}} \underbrace{\delta_{\varphi(p),k}}_{0} \delta_{\psi(k),q} \\
&\overset{\text{(iv)}}{=\!=} \delta_{\psi(\varphi(p)),q} \overset{\text{(v)}}{=\!=} \delta_{(\psi\varphi)(p),q}
\end{aligned}
$$

Justificación de los pasos:

- (i) definición del producto de dos matrices
- (ii) definición de la matriz de permutación
- (iii) dividimos la suma en dos partes para simplificar $\delta_{\varphi(p),k}$
- (iv) definición de la δ de Kronecker
- (v) definición del producto de dos permutaciones

Demostración: $\forall p, q \in \{1, \ldots, n\} \quad (P_\varphi P_\psi)_{p,q} = (P_{\psi\varphi})_{p,q}$

$$
\begin{aligned}
(P_\varphi P_\psi)_{p,q} &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} (P_\varphi)_{p,k} (P_\psi)_{k,q} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \sum_{k=1}^{n} \delta_{\varphi(p),k} \delta_{\psi(k),q} \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \sum_{k \in \{p\}} \underbrace{\delta_{\varphi(p),k}}_{1} \delta_{\psi(k),q} + \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{p\}} \underbrace{\delta_{\varphi(p),k}}_{0} \delta_{\psi(k),q} \\
&\overset{\text{(iv)}}{=\!=} \delta_{\psi(\varphi(p)),q} \overset{\text{(v)}}{=\!=} \delta_{(\psi\varphi)(p),q} \overset{\text{(vi)}}{=\!=} (P_{\psi\varphi})_{p,q}.
\end{aligned}
$$

Justificación de los pasos:

(i)	definición del producto de dos matrices
(ii), (vi)	definición de la matriz de permutación
(iii)	dividimos la suma en dos partes para simplificar $\delta_{\varphi(p),k}$
(iv)	definición de la δ de Kronecker
(v)	definición del producto de dos permutaciones

Producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.
Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.
Puede hacer comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} =$$

Producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.
Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.
Puede hacer comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3} P_{3,1,4,2,5} = P_{3,5,2,1,4},$$

Producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.
Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.
Puede hacer comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} = P_{3,5,2,1,4},$$

$$P_{3,1,5,2,4}P_{1,4,2,5,3} =$$

Producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.
Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.
Puede hacer comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} = P_{3,5,2,1,4},$$

$$P_{3,1,5,2,4}P_{1,4,2,5,3} = P_{2,1,3,4,5},$$

Producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.
Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.
Puede hacer comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} = P_{3,5,2,1,4},$$

$$P_{3,1,5,2,4}P_{1,4,2,5,3} = P_{2,1,3,4,5},$$

$$P_{4,1,3,2,5}P_{5,2,1,3,4} =$$

Producto de dos matrices de permutación

Ejercicios

Calcule los siguientes productos.
Se recomienda usar la fórmula que acabamos de demostrar.
Puede hacer comprobaciones escribiendo las matrices en la forma explícita.

$$P_{1,5,4,2,3}P_{3,1,4,2,5} = P_{3,5,2,1,4},$$

$$P_{3,1,5,2,4}P_{1,4,2,5,3} = P_{2,1,3,4,5},$$

$$P_{4,1,3,2,5}P_{5,2,1,3,4} = P_{3,5,1,2,4}.$$

Contenido

Objetivos y requisitos

Repaso rápido

- Permutaciones
- Multiplicación de matrices
- Delta de Kronecker

Matrices de permutaciones

Multiplicación de matrices de permutaciones

Matrices que intercambian dos renglones

Matrices de intercambio de dos renglones

La siguiente matriz se obtiene de la matriz identidad I_6 al intercambiar los renglones 2 y 5 de lugares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices de intercambio de dos renglones

La siguiente matriz se obtiene de la matriz identidad I_6 al intercambiar los renglones 2 y 5 de lugares:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{2\leftrightarrow 5}.$$

Vamos a denotar esta matriz por $E_{2\leftrightarrow 5}$.

Es una matriz elemental porque se obtiene de la matriz identidad al aplicar una operación elemental. Hay otros dos tipos de matrices elementales que no estudiamos en esta presentación.

Sería más preciso escribir $E^{(6)}_{2\leftrightarrow 5}$ indicando el tamaño de la matriz, pero el tamaño por lo común está claro del contexto y lo omitimos.

Matrices de intercambio de dos renglones

En general, si $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ y $p \neq q$,
entonces denotemos por $E_{p,q}^{(n)}$ o simplemente por $E_{p,q}$ a la matriz que se obtiene de la matriz identidad I_n al intercambiar sus renglones p y q.

Haga los siguientes ejercicios en papel (con $n = 4$):

$$E_{1,3} =$$

Matrices de intercambio de dos renglones

En general, si $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ y $p \neq q$,
entonces denotemos por $E_{p,q}^{(n)}$ o simplemente por $E_{p,q}$ a la matriz
que se obtiene de la matriz identidad I_n al intercambiar sus renglones p y q.

Haga los siguientes ejercicios en papel (con $n = 4$):

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Matrices de intercambio de dos renglones

En general, si $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ y $p \neq q$,
entonces denotemos por $E_{p,q}^{(n)}$ o simplemente por $E_{p,q}$ a la matriz que se obtiene de la matriz identidad I_n al intercambiar sus renglones p y q.

Haga los siguientes ejercicios en papel (con $n = 4$):

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{2,3} =$$

Matrices de intercambio de dos renglones

En general, si $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ y $p \neq q$,
entonces denotemos por $E_{p,q}^{(n)}$ o simplemente por $E_{p,q}$ a la matriz
que se obtiene de la matriz identidad I_n al intercambiar sus renglones p y q.

Haga los siguientes ejercicios en papel (con $n = 4$):

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Matrices de intercambio de dos renglones

En general, si $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ y $p \neq q$,
entonces denotemos por $E_{p,q}^{(n)}$ o simplemente por $E_{p,q}$ a la matriz
que se obtiene de la matriz identidad I_n al intercambiar sus renglones p y q.

Haga los siguientes ejercicios en papel (con $n = 4$):

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{1,4} =$$

Matrices de intercambio de dos renglones

En general, si $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ y $p \neq q$,
entonces denotemos por $E_{p,q}^{(n)}$ o simplemente por $E_{p,q}$ a la matriz
que se obtiene de la matriz identidad I_n al intercambiar sus renglones p y q.

Haga los siguientes ejercicios en papel (con $n = 4$):

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Matrices de intercambio de dos renglones

En general, si $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ y $p \neq q$,
entonces denotemos por $E_{p,q}^{(n)}$ o simplemente por $E_{p,q}$ a la matriz
que se obtiene de la matriz identidad I_n al intercambiar sus renglones p y q.

Haga los siguientes ejercicios en papel (con $n = 4$):

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_{1,2} =$$

Matrices de intercambio de dos renglones

En general, si $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ y $p \neq q$,
entonces denotemos por $E_{p,q}^{(n)}$ o simplemente por $E_{p,q}$ a la matriz que se obtiene de la matriz identidad I_n al intercambiar sus renglones p y q.

Haga los siguientes ejercicios en papel (con $n = 4$):

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_{1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrices de intercambio de dos renglones

Las matrices de tipo $E_{p\leftrightarrow q}$ (donde $p \neq q$) forman una subclase de las matrices de permutaciones.
Por ejemplo,

$$E_{2\leftrightarrow 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P_{1,4,3,2} = P_{\tau_{2,4}}.$$

En general, la matriz $E_{p,q}$ corresponde a la transposición $\tau_{p,q}$:

$$E_{p,q} = P_{\tau_{p,q}}.$$

Matrices de intercambio de dos renglones

Complete las respuestas de los ejercicios anteriores:

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? \end{bmatrix} = P_{?,?,?,?} = P_{\tau_{?,?}}$$

Matrices de intercambio de dos renglones

Complete las respuestas de los ejercicios anteriores:

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{3,2,1,4} = P_{\tau_{1,3}},$$

Matrices de intercambio de dos renglones

Complete las respuestas de los ejercicios anteriores:

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{3,2,1,4} = P_{\tau_{1,3}},$$

$$E_{2,3} =$$

Matrices de intercambio de dos renglones

Complete las respuestas de los ejercicios anteriores:

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{3,2,1,4} = P_{\tau_{1,3}},$$

$$E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{1,3,2,4} = P_{\tau_{2,3}},$$

Matrices de intercambio de dos renglones

Complete las respuestas de los ejercicios anteriores:

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{3,2,1,4} = P_{\tau_{1,3}},$$

$$E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{1,3,2,4} = P_{\tau_{2,3}},$$

$$E_{1,4} =$$

Matrices de intercambio de dos renglones

Complete las respuestas de los ejercicios anteriores:

$$E_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{3,2,1,4} = P_{\tau_{1,3}},$$

$$E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_{1,3,2,4} = P_{\tau_{2,3}},$$

$$E_{1,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P_{4,2,3,1} = P_{\tau_{1,4}}.$$

Producto de una matriz de intercambio de dos renglones por una matriz general

Sea A una matriz general de clase $\mathcal{M}_{4\times 4}$. Calcule el producto $E_{2\leftrightarrow 4}$:

$$E_{2\leftrightarrow 4}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix} = ?$$

Nótese que la matriz $E_{2\leftrightarrow 4}A$ se obtiene de la matriz A al hacer una operación elemental:

$$A \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} E_{2\leftrightarrow 4}A.$$

Producto de una matriz de intercambio de dos renglones por una matriz de permutación

Vamos a multiplicar una matriz de intercambio de dos renglones por una matriz de permutación:

$$E_{1\leftrightarrow 3}P_{2,4,1,3} = E_{1\leftrightarrow 3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P_{1,4,2,3}.$$

Producto de una matriz de intercambio de dos renglones por una matriz de permutación

Vamos a multiplicar una matriz de intercambio de dos renglones por una matriz de permutación:

$$E_{1\leftrightarrow 3}P_{2,4,1,3} = E_{1\leftrightarrow 3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P_{1,4,2,3}.$$

Este producto se puede calcular más fácilmente:

$$E_{1\leftrightarrow 3}P_{2,4,1,3} = P_{\tau_{1,3}}P_{2,4,1,3} = P_{(2,4,1,3)\tau_{1,3}} = P_{1,4,2,3}.$$

En el último paso hicimos el intercambio de los números 1 y 2 que estaban en las posiciones 1 y 3.

Producto de una matriz de intercambio de dos renglones por una matriz de permutación

Haga cada uno de los siguientes ejercicios de varias maneras.

$$E_{1\leftrightarrow 2}P_{3,5,1,2,4} =$$

$$E_{2\leftrightarrow 4}P_{5,1,4,3,2} =$$

$$E_{3\leftrightarrow 5}P_{2,4,3,1,5} =$$

$$E_{2\leftrightarrow 3}P_{1,4,2,5,3} =$$

$$E_{4\leftrightarrow 5}P_{4,3,5,1,2} =$$

Producto de una matriz de intercambio de dos renglones por una matriz de permutación

Haga cada uno de los siguientes ejercicios de varias maneras.

$$E_{1\leftrightarrow 2} P_{3,5,1,2,4} = P_{5,3,1,2,4},$$

$$E_{2\leftrightarrow 4} P_{5,1,4,3,2} = P_{5,3,4,1,2},$$

$$E_{3\leftrightarrow 5} P_{2,4,3,1,5} = P_{2,4,5,1,3},$$

$$E_{2\leftrightarrow 3} P_{1,4,2,5,3} = P_{1,2,4,5,3},$$

$$E_{4\leftrightarrow 5} P_{4,3,5,1,2} = P_{4,3,5,2,1}.$$

Gracias por su atención.

Recomiendo resolver todos los ejercicios incluidos en esta presentación.