Panorama del curso Métodos Numéricos I

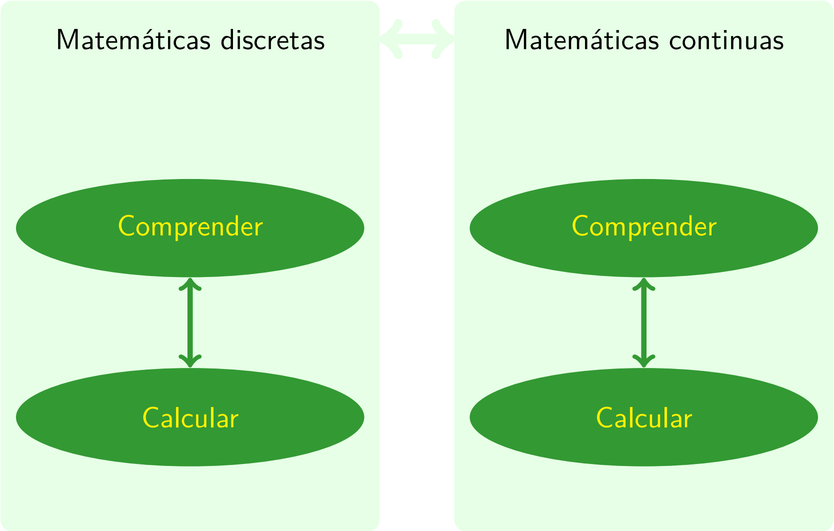
Egor Maximenko

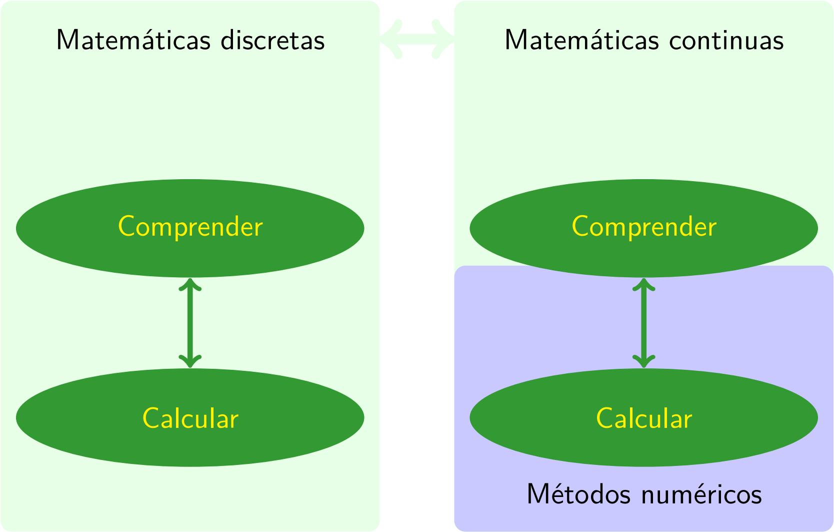
ESFM del IPN

2014

Contenido

Contenido


Matemáticas discretas
Comprender
Calcular
Matemáticas continuas
Comprender
Calcular


Matemáticas discretas
Matemáticas continuas
Comprender
Calcular
Comprender
Calcular
Métodos numéricos

Numerical analysis is the study of algorithms
for the problems of continuous mathematics.

Lloyd N. Trefethen

Propósito del curso:

Analizar algoritmos para obtener soluciones numéricas
de los problemas típicos de matemática continua,
incluso en las situaciones cuando la solución exacta no existe o es difícil de conseguir, minimizando el número de operaciones aritméticas y los errores.

Programa del curso y sistema de calificaciones

Cuatro unidades:

- Preliminares.
- Solución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Raíces de ecuaciones no lineales.
- Interpolación polinomial.

Programa del curso y sistema de calificaciones

Cuatro unidades:

- Preliminares.
- Solución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Raíces de ecuaciones no lineales.
- Interpolación polinomial.

Cada calificación parcial consta de las siguientes partes:

- examen escrito (65 %),
- tareas individuales (20 %),
- programas escritos por los estudiantes (15 %),
- participación (hasta 10 %),
- tareas adicionales (entregar soluciones de problemas teóricos).

¿Qué aprenden los estudiantes en este curso?

El curso de Métodos Numéricos I tiene los siguientes aspectos:

1. **Algorítmos:** resolver en papel ejercicios típicos para aprender bien las ideas de algoritmos de métodos numéricos.
2. **Programación:** programar los algoritmos principales en algún lenguaje de programación.
3. **Teoría:** comprender cómo deducir algunas de las fórmulas, cómo acotar los errores y cómo calcular el número de operaciones.
4. **Aplicaciones:** ver cómo se aplican métodos numéricos en otras ramas de matemáticas y en otras ciencias.

En mi curso practicamos los algoritmos, conocemos algo de la teoría y escribimos muchos programas, pero **casi no estudiamos aplicaciones** (es uno de los defectos de mi curso).

Software

Wolfram Mathematica. Comercial.
Es un sistema universal de álgebra computacional.

Maxima. Libre.
Parece a Wolfram Mathematica, pero está menos desarrollado.

MATLAB. Comercial. Cálculos numéricos orientados a matrices.

GNU Octave. Un análogo libre de MATLAB.

Python. Libre. Tiene una sintaxis muy natural.
La biblioteca NumPy permite programar casi como en MATLAB.

Sage. Libre. Utiliza la sintaxis de Python.

C, Fortran. Libres. Los programas son muy largos, pero muy rápidos.

Ejemplo de un programa sencillo

Escribamos un programa que crea una matriz con entradas aleatorias y aplica a esta matriz una operación elemental por renglones.

En Wolfram Mathematica:

```
n = 10
A = RandomReal[{0, 1}, {n, n}]
A[[2]] += 5 * A[[1]]
```

En Python con NumPy:

```
from numpy import *
n = 10
A = random.rand(n, n)
A[1, :] += 5 * A[0, :]
```

El mismo programa escrito en C

```
include <stdlib.h>
int main() {
  int n = 10, i, j;
  double **A = (double**) malloc(n * sizeof(double*));
  for (i = 0; i < n; i++)
    A[i] = (double*) malloc(n * sizeof(double));
  for (i = 0; i < n; i++)
    for (j = 0; j < n; j++)
      A[i][j] = random() * 1.0 / RAND_MAX;
  for (j = 0; j < n; j++)
    A[1][j] += 5 * A[0][j];
  for (i = 0; i < n; i++)
    free(A[i]);
  free(A);
  return 0;
}
```

Literatura

- Burden, R. L. y Faires, J. D.,
  Análisis Numérico, Séptima Edición.
  Cengage Learning, México.
- Smith, W. Allen,
  Análisis Numérico.
  Prentice Hall Hispanoamericana, Ed. México, 608 p.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P.,
  Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing. 2nd Ed.
  Cambridge University Press 1992, 994 p.

Mis apuntes y ejercicios:

`http://esfm.egormaximenko.com`

Contenido

Contenido

Preliminares

Representación de números en la computadora

- Representación en base 2.

  Escribir los números 45 y 10.75 en base 2.

  Sumar y multiplicar los números binarios 1011_2 y 10101_2.

Preliminares

Representación de números en la computadora

- Representación en base 2.

  Escribir los números 45 y 10.75 en base 2.

  Sumar y multiplicar los números binarios 1011_2 y 10101_2.

- Sistemas numéricos de punto flotante.

  Representación de números con punto flotante.

  ¿Qué número está representado en el formato "double" por la siguiente cadena de bits?

  1 10000000101 0000000000000000000000000000000000000000000000000011

- Errores de redondeo. Propagación de los errores.
- Errores absolutos y relativos.

Preliminares

Representación de números en la computadora

- Representación en base 2.

  Escribir los números 45 y 10.75 en base 2.

  Sumar y multiplicar los números binarios 1011_2 y 10101_2.

- Sistemas numéricos de punto flotante.

  Representación de números con punto flotante.

  ¿Qué número está representado en el formato "double" por la siguiente cadena de bits?

  1 10000000101 0000000000000000000000000000000000000000000000000011

- Errores de redondeo. Propagación de los errores.
- Errores absolutos y relativos.

Preliminares

Aritmética con redondeo

En el aritmética con tres dígitos decimales, restar y multiplicar los números

$$a = 1.02 \cdot 10^2, \qquad b = 9.87 \cdot 10^1,$$

calcular los errores de redondeo.

Preliminares

Repaso de algunas herramientas de Cálculo y de Álgebra

- Límite de una sucesión.
- Funciones continuas, teorema del valor intermedio.
- Funciones derivables, teorema del valor medio.
- Cálculo de máximos y mínimos.
- Multiplicación de polinomios.
- División sintética de un polinomio entre un binomio.

Contenido

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas de ecuaciones lineales surgen en todas las áreas de matemáticas, lo mismo que en otras ciencias, naturales y sociales.

Por ejemplo, Wassily Leóntief recibió el premio Nobel de Economía en 1973 por la descripción de relaciones intersectoriales en macroeconomía a través de sistemas de ecuaciones lineales.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales vamos a usar el método de Gauss (eliminación gaussiana) y sus modificaciones.

Método de Gauss

Consideremos el método de eliminación gaussiana con el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1; \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & -3; \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -4. \end{cases}$$

Método de Gauss

Consideremos el método de eliminación gaussiana con el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1; \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & -3; \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -4. \end{cases}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales,
escriben la matriz aumentada del sistema:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

Método de Gauss

Consideremos el método de eliminación gaussiana con el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1; \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & -3; \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -4. \end{cases}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales,
escriben la matriz aumentada del sistema:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

Luego se aplican transformaciones elementales por renglones
para reducir la matriz del sistema a una matriz escalonada.

Método de Gauss: reducción a una matriz triangular

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \colorbox{lightgreen}{2} & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right]$$

Método de Gauss: reducción a una matriz triangular

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \colorbox{lightgreen}{2} & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 1.5R_1 \end{array}$$

Usamos el elemento (1,1) como pivote
para aniquilar los elementos que están abajo de él.

Método de Gauss: reducción a una matriz triangular

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \colorbox{lightgreen}{2} & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 1.5R_1 \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} \colorbox{lightgreen}{2} & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \colorbox{lightgreen}{-1} & -1 & -5 \\ 0 & -6.5 & 2.5 & -5.5 \end{array}\right]$$

Usamos el elemento (1,1) como pivote
para aniquilar los elementos que están abajo de él.

Método de Gauss: reducción a una matriz triangular

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} R_2 &:= R_2 - 2R_1 \\ R_3 &:= R_3 - 1.5R_1 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -6.5 & 2.5 & -5.5 \end{array}\right] \qquad R_3 := R_3 - 6.5R_2$$

Después usamos el elemento (2,2) como pivote para aniquilar el elemento que está abajo de él.

Método de Gauss: reducción a una matriz triangular

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -3 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} R_2 := R_2 - 2R_1 \\ R_3 := R_3 - 1.5R_1 \end{array}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -6.5 & 2.5 & -5.5 \end{array}\right] \qquad R_3 := R_3 - 6.5R_2$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}\right]$$

Después usamos el elemento (2,2) como pivote para aniquilar el elemento que está abajo de él.

Método de Gauss: sustitución hacia atrás

Obtenemos una matriz triangular superior (escalonada).
Escribimos el sistema de ecuaciones correspondiente:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}\right] \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1; \\ & - & x_2 & - & x_3 & = & -5; \\ & & & & 9x_3 & = & 27. \end{array}\right.$$

Ahora podemos hallar las incógnitas, empezando con la última ecuación:

$$x_3 = \frac{27}{9} = 3;$$

$$x_2 = \frac{-5 + x_3}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2;$$

$$x_1 = \frac{-1 - 3x_2 + x_3}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Solución: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Modificaciones del método de Gauss

1. **Estrategias de pivoteo.**
   En el ejemplo considerado el elemento pivote siempre era eligido en la diagonal principal. Pero el elemento diagonal puede ser cero. Para evitar este caso y para disminuir errores de redondeo, en calidad de pivote eligen el elemento más grande en cierto sentido.

Modificaciones del método de Gauss

1. **Estrategias de pivoteo.**
   En el ejemplo considerado el elemento pivote siempre era eligido en la diagonal principal. Pero el elemento diagonal puede ser cero. Para evitar este caso y para disminuir errores de redondeo, en calidad de pivote eligen el elemento más grande en cierto sentido.
2. **Método de Gauss–Jordan.**
   Es posible aniquilar no sólo los elementos abajo del pivote, sino también los elementos arriba del pivote.

Modificaciones del método de Gauss

1. **Estrategias de pivoteo.**
   En el ejemplo considerado el elemento pivote siempre era eligido en la diagonal principal. Pero el elemento diagonal puede ser cero. Para evitar este caso y para disminuir errores de redondeo, en calidad de pivote eligen el elemento más grande en cierto sentido.
2. **Método de Gauss–Jordan.**
   Es posible aniquilar no sólo los elementos abajo del pivote, sino también los elementos arriba del pivote.
3. **Descomposición LU.**
   La matriz inicial se descompone en un producto de dos matrices triangulares: una triangular inferior y la otra triangular superior.

Contenido

Métodos para calcular raíces de ecuaciones no lineales

Hay muchos métodos para calcular (aproximadamente) raíces de ecuaciones no lineales.

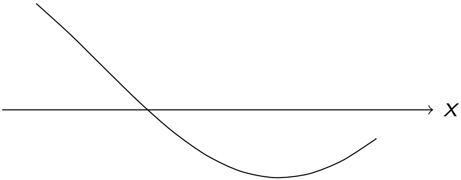
Vamos a estudiar los siguientes métodos:

- método de la iteración simple (= método de punto fijo)
- método de la bisección
- métodos de la secante y de la posición falsa
- método de Newton–Raphson (= método de la tangente)
- métodos especiales para raíces de polinomios

Método de la bisección

Ejemplo

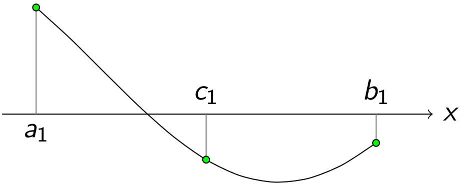
Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$ con exactitud 0.1.



Método de la bisección

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$ con exactitud 0.1.



$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 4$$

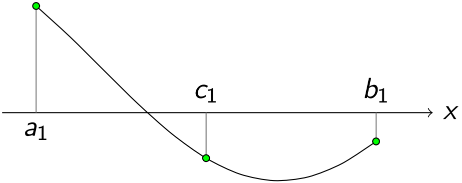
$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 2.5$$

$$f(c_1) \approx -0.4011 < 0$$

Método de la bisección

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$ con exactitud 0.1.



$$a_1 = 1 \qquad b_1 = 4$$

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 2.5$$

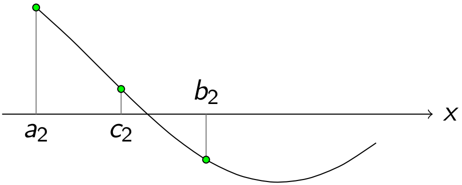
$$f(c_1) \approx -0.4011 < 0$$

$$a_2 = a_1 \qquad b_2 = c_1$$

Método de la bisección

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$ con exactitud 0.1.



$$a_2 = 1 \qquad b_2 = 2.5$$

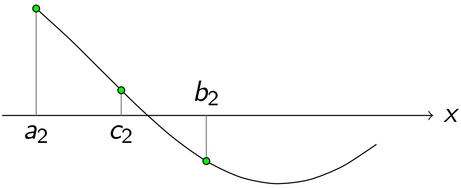
$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 1.75$$

$$f(c_2) \approx 0.2218 > 0$$

Método de la bisección

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$ con exactitud 0.1.



$$a_2 = 1 \qquad b_2 = 2.5$$

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 1.75$$

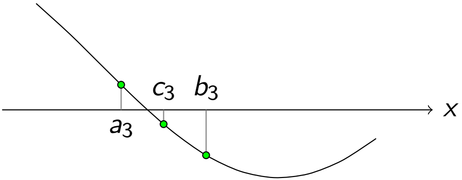
$$f(c_2) \approx 0.2218 > 0$$

$$a_3 = c_2 \qquad b_3 = b_2$$

Método de la bisección

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$ con exactitud 0.1.



$$a_3 = 1.75 \qquad b_3 = 2.5$$

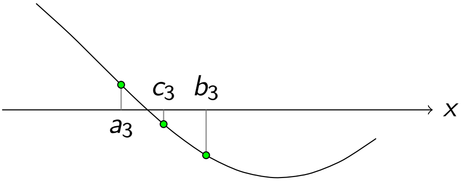
$$c_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = 2.125$$

$$f(c_3) \approx -0.1262$$

Método de la bisección

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$ con exactitud 0.1.



$$a_3 = 1.75 \qquad b_3 = 2.5$$

$$c_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = 2.125$$

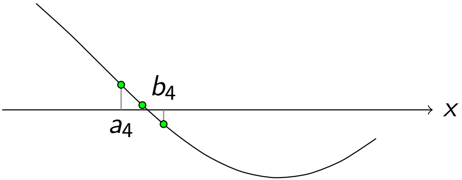
$$f(c_3) \approx -0.1262$$

$$a_4 = a_3 \qquad b_4 = c_3$$

Método de la bisección

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$ con exactitud 0.1.



$$a_4 = 1.75 \qquad b_4 = 2.125$$

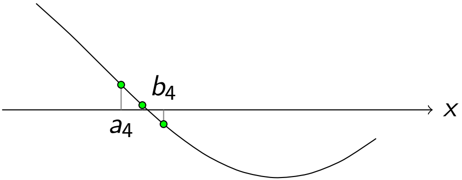
$$c_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = 1.9375$$

$$f(c_4) \approx 0.0415$$

Método de la bisección

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$ con exactitud 0.1.



$$a_4 = 1.75 \qquad b_4 = 2.125$$

$$c_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = 1.9375$$

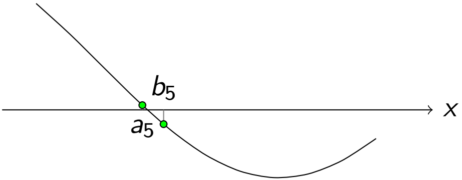
$$f(c_4) \approx 0.0415$$

$$a_5 = c_4 \qquad b_5 = b_4$$

Método de la bisección

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$ con exactitud 0.1.



$$a_5 = 1.9375 \qquad b_5 = 2.125$$

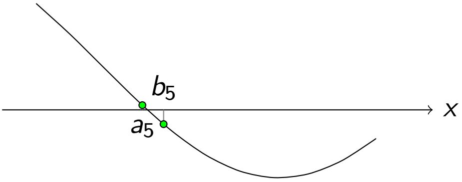
$$c_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} \approx 2.0313$$

$$|a_5 - c_5| = |b_5 - c_5| < 0.1$$

Método de la bisección

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$ con exactitud 0.1.



$$a_5 = 1.9375 \qquad b_5 = 2.125$$

$$c_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} \approx 2.0313$$

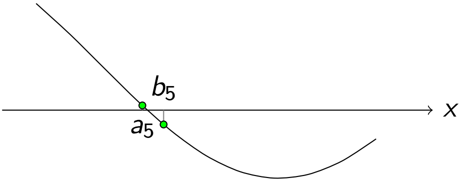
$$|a_5 - c_5| = |b_5 - c_5| < 0.1$$

Respuesta: $x \approx 2.03 \pm 0.10$

Método de la bisección

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ en el intervalo cerrado $[1, 4]$ con exactitud 0.1.



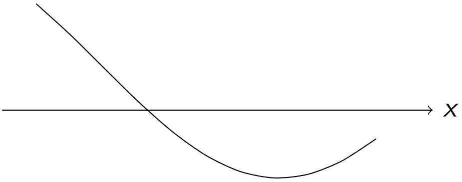
Respuesta: $x \approx 2.03 \pm 0.10$

Comprobación: $\arccos(-0.4) \approx 1.98$.

Método de Newton–Raphson

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ con exactitud 0.1, usando la aproximación inicial $x_0 = 2.5$.

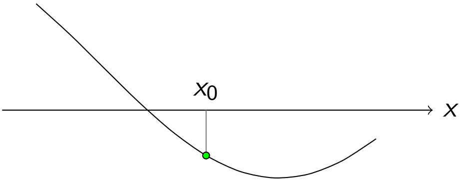


Método de Newton–Raphson

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ con exactitud 0.1, usando la aproximación inicial $x_0 = 2.5$.

En el *n*-ésimo paso trazamos la tangente en el punto $(x_n, f(x_n))$ y calculamos la intersección de esta tangente con el eje de abscisas.

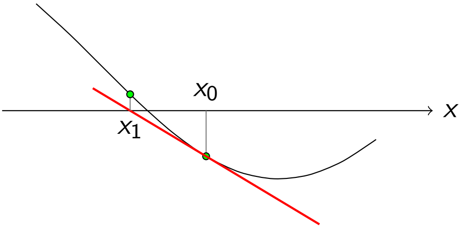


Método de Newton–Raphson

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ con exactitud 0.1, usando la aproximación inicial $x_0 = 2.5$.

En el n-ésimo paso trazamos la tangente en el punto $(x_n, f(x_n))$ y calculamos la intersección de esta tangente con el eje de abscisas.



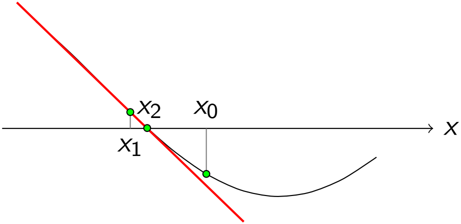
$$x_0 = 2.5$$
$$f(x_0) \approx -0.4011$$
$$f'(x_0) \approx -0.5985$$
$$x_1 \approx 1.8297$$

Método de Newton–Raphson

Ejemplo

Calcular la raíz de la función $f(x) = \cos x + 0.4$ con exactitud 0.1, usando la aproximación inicial $x_0 = 2.5$.

En el n-ésimo paso trazamos la tangente en el punto $(x_n, f(x_n))$ y calculamos la intersección de esta tangente con el eje de abscisas.

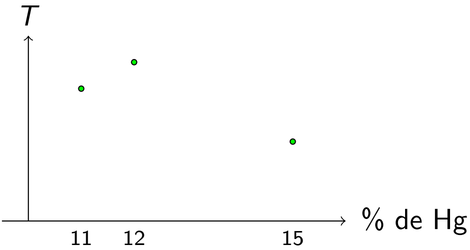


$$x_1 = 1.8297$$
$$f(x_1) \approx 0.1440$$
$$f'(x_1) \approx -0.9667$$
$$x_2 \approx 1.9786$$

Contenido

Motivación

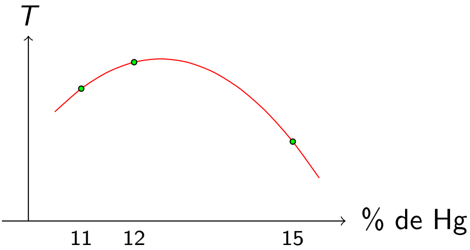
Una investigación imaginaria:
Sintetizamos varias sustancias y medimos su T de superconductividad.
Podemos cambiar el porcentaje de un solo elemento (Hg).
Experimentos nos dan los siguientes resultados:



Queremos predecir valores de T para otros valores de porcentaje.

Motivación

Una investigación imaginaria:
Sintetizamos varias sustancias y medimos su T de superconductividad.
Podemos cambiar el porcentaje de un solo elemento (Hg).
Experimentos nos dan los siguientes resultados:



Queremos predecir valores de T para otros valores de porcentaje.
Si no sabemos buen modelo teórico para nuestro problema,
podemos considerar una parábola que pasa por los puntos marcados.

Problema de la interpolación polinomial

Dado un conjunto de $n+1$ puntos:

$$(x_0, y_0), \qquad (x_1, y_1), \qquad \ldots, \qquad (x_n, y_n),$$

donde $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, construir un polinomio f de grado $\leq n$ tal que $\quad f(x_k) = y_k \quad (0 \leq k \leq n)$.

Problema de la interpolación polinomial

Dado un conjunto de $n+1$ puntos:

$$(x_0, y_0), \qquad (x_1, y_1), \qquad \ldots, \qquad (x_n, y_n),$$

donde $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, construir un polinomio f de grado $\leq n$ tal que $\quad f(x_k) = y_k \quad (0 \leq k \leq n)$.

Teorema

El problema de la interpolación polinomial tiene una única solución.

La demostración utiliza el determinante de Vandermonde.

Problema de la interpolación polinomial

Dado un conjunto de $n+1$ puntos:

$$(x_0, y_0), \qquad (x_1, y_1), \qquad \ldots, \qquad (x_n, y_n),$$

donde $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, construir un polinomio f de grado $\le n$ tal que $\quad f(x_k) = y_k \quad (0 \le k \le n)$.

Teorema

El problema de la interpolación polinomial tiene una única solución.

La demostración utiliza el determinante de Vandermonde.

Consideremos dos representaciones del polinomio interpolante:

- con la fórmula de Lagrange (muy importante para la teoría);
- con la fórmula de Newton (más cómoda para la práctica).

Fórmula de Lagrange del polinomio interpolante

El polinomio de interpolación en forma de Lagrange para tres puntos

$$(x_0, y_0), \quad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \qquad x_0 < x_1 < x_2,$$

se define mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} f(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ + y_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{aligned}$$

Fórmula de Lagrange del polinomio interpolante

El polinomio de interpolación en forma de Lagrange para tres puntos

$$(x_0, y_0), \quad (x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \qquad x_0 < x_1 < x_2,$$

se define mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} f(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ + y_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned} f(x_0) &= y_0 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 + y_2 \cdot 0 = y_0; \\ f(x_1) &= y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 1 + y_2 \cdot 0 = y_1; \\ f(x_2) &= y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 + y_2 \cdot 1 = y_2. \end{aligned}$$

Fórmula de Newton para del polinomio interpolante

Está basada en diferencias divididas:

Fórmula de Newton para del polinomio interpolante

Está basada en diferencias divididas:

$$\boxed{f[x_0] = y_0}$$

$$\boxed{f[x_1] = y_1}$$

$$\boxed{f[x_2] = y_2}$$

Fórmula de Newton para del polinomio interpolante

Está basada en diferencias divididas:

$$f[x_0] = y_0$$

$$f[x_0; x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1] = y_1$$

$$f[x_1; x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_2] = y_2$$

Fórmula de Newton para del polinomio interpolante

Está basada en diferencias divididas:

$$f[x_0] = y_0$$

$$f[x_0; x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$$

$$f[x_1] = y_1$$

$$f[x_0; x_1; x_2] = \frac{f[x_1;x_2]-f[x_0;x_1]}{x_2-x_0}$$

$$f[x_1; x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$$

$$f[x_2] = y_2$$

Fórmula de Newton para del polinomio interpolante

Está basada en diferencias divididas:

$$
\begin{tikzcd}
f[x_0] = y_0 \arrow[dr] & & \\
 & f[x_0;x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} \arrow[dr] & \\
f[x_1] = y_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & f[x_0;x_1;x_2] = \frac{f[x_1;x_2]-f[x_0;x_1]}{x_2-x_0} \\
 & f[x_1;x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} \arrow[ur] & \\
f[x_2] = y_2 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

$$f(x) = f[x_0] + f[x_0;x_1]\,(x-x_0) + f[x_0;x_1;x_2]\,(x-x_0)(x-x_1).$$

Contenido

Temas de Métodos Numéricos no incluidos en este curso

- Integración numérica:
  regla del trapecio, regla de Simpson, fórmulas de Newton–Cotes.

Temas de Métodos Numéricos no incluidos en este curso

- Integración numérica:
  regla del trapecio, regla de Simpson, fórmulas de Newton–Cotes.
- Problemas de valor inicial para EDO:
  método de Euler, métodos de Runge–Kutta.

Temas de Métodos Numéricos no incluidos en este curso

- Integración numérica:
  regla del trapecio, regla de Simpson, fórmulas de Newton–Cotes.
- Problemas de valor inicial para EDO:
  método de Euler, métodos de Runge–Kutta.
- Problemas con valor en la frontera para EDO:
  método del disparo, métodos de diferencias finitas.

Temas de Métodos Numéricos no incluidos en este curso

- Integración numérica:
  regla del trapecio, regla de Simpson, fórmulas de Newton–Cotes.
- Problemas de valor inicial para EDO:
  método de Euler, métodos de Runge–Kutta.
- Problemas con valor en la frontera para EDO:
  método del disparo, métodos de diferencias finitas.
- Soluciones numéricas de EDP:
  métodos de diferencias finitas, método de elementos finitos.

Temas de Métodos Numéricos no incluidos en este curso

- Integración numérica:
  regla del trapecio, regla de Simpson, fórmulas de Newton–Cotes.
- Problemas de valor inicial para EDO:
  método de Euler, métodos de Runge–Kutta.
- Problemas con valor en la frontera para EDO:
  método del disparo, métodos de diferencias finitas.
- Soluciones numéricas de EDP:
  métodos de diferencias finitas, método de elementos finitos.
- Descomposición QR de una matriz.

Temas de Métodos Numéricos no incluidos en este curso

- Integración numérica:
  regla del trapecio, regla de Simpson, fórmulas de Newton–Cotes.
- Problemas de valor inicial para EDO:
  método de Euler, métodos de Runge–Kutta.
- Problemas con valor en la frontera para EDO:
  método del disparo, métodos de diferencias finitas.
- Soluciones numéricas de EDP:
  métodos de diferencias finitas, método de elementos finitos.
- Descomposición QR de una matriz.
- Descomposición de valores singulares de una matriz.

Temas de Métodos Numéricos no incluidos en este curso

- Integración numérica:
  regla del trapecio, regla de Simpson, fórmulas de Newton–Cotes.
- Problemas de valor inicial para EDO:
  método de Euler, métodos de Runge–Kutta.
- Problemas con valor en la frontera para EDO:
  método del disparo, métodos de diferencias finitas.
- Soluciones numéricas de EDP:
  métodos de diferencias finitas, método de elementos finitos.
- Descomposición QR de una matriz.
- Descomposición de valores singulares de una matriz.
- Aproximación de los valores propios de una matriz.

...

Contenido

Tarea de casa

- Conseguir e instalar **Wolfram Mathematica**
  u otro sistema de álgebra computacional.
  Usando la documentación conocer algunas de sus posibilidades:
  dibujar una gráfica, multiplicar dos matrices.

  Otras opciones recomendadas: **Python con NumPy**, **GNU Octave**.

Tarea de casa

- Conseguir e instalar **Wolfram Mathematica**
  u otro sistema de álgebra computacional.
  Usando la documentación conocer algunas de sus posibilidades:
  dibujar una gráfica, multiplicar dos matrices.

  Otras opciones recomendadas: **Python con NumPy**, **GNU Octave**.

- Conseguir el libro de **Burden y Faires**, *Análisis Numérico*,
  u otro libro de Análisis Numérico.

Tarea de casa

- Conseguir e instalar **Wolfram Mathematica**
  u otro sistema de álgebra computacional.
  Usando la documentación conocer algunas de sus posibilidades:
  dibujar una gráfica, multiplicar dos matrices.

  Otras opciones recomendadas: **Python con NumPy**, **GNU Octave**.

- Conseguir el libro de **Burden y Faires**, *Análisis Numérico*,
  u otro libro de Análisis Numérico.

- Repasar los siguientes temas de Cálculo:
  límite de una sucesión, continuidad de una función en un punto,
  teorema del valor intermedio, **teorema del valor medio**.

Tarea de casa

- Conseguir e instalar **Wolfram Mathematica**
  u otro sistema de álgebra computacional.
  Usando la documentación conocer algunas de sus posibilidades:
  dibujar una gráfica, multiplicar dos matrices.

  Otras opciones recomendadas: **Python con NumPy**, **GNU Octave**.

- Conseguir el libro de **Burden y Faires**, *Análisis Numérico*,
  u otro libro de Análisis Numérico.

- Repasar los siguientes temas de Cálculo:
  límite de una sucesión, continuidad de una función en un punto,
  teorema del valor intermedio, **teorema del valor medio**.

- Repasar la representación en base 2.
  Escribir en base 2 los números 45 y 10.75.

Tarea de casa

- Conseguir e instalar **Wolfram Mathematica**
  u otro sistema de álgebra computacional.
  Usando la documentación conocer algunas de sus posibilidades:
  dibujar una gráfica, multiplicar dos matrices.

  Otras opciones recomendadas: **Python con NumPy**, **GNU Octave**.

- Conseguir el libro de **Burden y Faires**, *Análisis Numérico*,
  u otro libro de Análisis Numérico.

- Repasar los siguientes temas de Cálculo:
  límite de una sucesión, continuidad de una función en un punto,
  teorema del valor intermedio, **teorema del valor medio**.

- Repasar la representación en base 2.
  Escribir en base 2 los números 45 y 10.75.

- Deducir las fórmulas para los coeficientes del producto
  de un polinomio por un binomio mónico.