Guía del Examen a Título de Suficiencia de Métodos Numéricos I, Ingeniería Matemática

Además de varios ejercicios simples (que se encuentran en tareas individuales), cada variante del examen incluye un algoritmo y un problema teórico. Nótese que los ejercicios simples necesitan muchos cálculos y valen poco. Para ganar una buena calificación, hay que poner atención a los últimos problemas.

A continuación están escritos los algoritmos y problemas teóricos típicos que pueden venir en el examen.

Algoritmos que se pueden incluir en el examen

Los algoritmos se pueden escribir en el pseudocódigo o en algún lenguaje de programación. Como una tarea adicional, puede calcular el número de multiplicaciones y divisiones que se realizan durante la ejecución del algoritmo (esta tarea no se aplica al método del punto fijo).

1. **Multiplicación de un polinomio por un binomio mónico.** Escriba el algoritmo de la multiplicación de un polinomio general $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$ por un binomio mónico $b + x$.

   Entrada: una lista de números $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, un número b.

   Salida: una lista de números $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tal que se cumpla la siguiente igualdad de polinomios:
   $$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1})(b + x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n.$$

2. **División de un polinomio entre un binomio.** Escriba el algoritmo de Horner–Ruffini que se usa para dividir un polinomio $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$ entre un binomio mónico de la forma $x - b$. Hay que calcular los coeficientes del cociente y el resto.

   Entrada: una lista de números $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, un número b.

   Salida: una lista de números $c_0, c_1, \ldots, c_{n-2}$ y un número r tales que se cumpla la siguiente igualdad de polinomios:
   $$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} = (-b + x)(c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-2} x^{n-2}) + r.$$

3. **Sustitución hacia adelante para resolver sistemas de ecuaciones lineales con matrices triangulares inferiores.** Escriba el algoritmo de la sustitución hacia adelante que se usa para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Lx = b$, donde L es una matriz triangular inferior de orden n con entradas diagonales no nulas y b es un vector de longitud n.

   Entrada: una matriz cuadrada L y un vector b. Se supone que estos datos son correctos: la matriz L es cuadrada, triangular inferior y tiene entradas diagonales no nulas, la longitud del vector b coincide con el orden de L.

   Salida: un vector x tal que $Lx = b$.

4. **Sustitución hacia atrás para resolver sistemas de ecuaciones lineales con matrices triangulares superiores.** Escriba el algoritmo de la sustitución hacia atrás que se usa para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Ux = b$, donde U es una matriz triangular superior de orden n con entradas diagonales no nulas y b es un vector de longitud n.

   Entrada: una matriz cuadrada U y un vector b. Se supone que estos datos son correctos: la matriz U es cuadrada, triangular superior y tiene entradas diagonales no nulas, y la longitud del vector b coincide con el orden de L.

   Salida: un vector x tal que $Ux = b$.

5. **Algoritmo para resolver sistemas tridiagonales de ecuaciones lineales**, usando pivotes diagonales. Los datos iniciales son los vectores a, b, c, r de longitudes n, $n-1$, $n-1$, n, respectivamente. Por ejemplo, para $n = 5$, se trata del sistema

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & r_1 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & 0 & r_3 \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 & b_4 & r_4 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 & a_5 & r_5 \end{array}\right].$$

6. **Método del punto fijo.** Escriba una función (un algoritmo) que realice el método del punto fijo llamado también el método de iteración simple. El algoritmo debe terminarse cuando la distancia entre dos aproximaciones sucesivas es menor que el número t dado o cuando el número de las iteraciones hechas es mayor que el número m dado.

   Entrada: una función f, un punto inicial $x0$, el número máximo de pasos m y la "tolerancia" $t > 0$.

   Salida: una aproximación del punto fijo.

7. **Método de bisección.** Escriba una función (un algoritmo) que realice el método de bisección. El algoritmo debe terminarse cuando la distancia entre los extremos del intervalo encontrado es menor que el número t dado o cuando el número de las iteraciones hechas es mayor que el número m dado.

Entrada: una función f, dos números a y b tales que $a < b$ y la función toma valores de signos diferentes en a y b, el número máximo de pasos m y la "tolerancia" $t > 0$.

Salida: una aproximación de un cero de f en $[a, b]$.

8. **Regla falsa.** Escriba una función (un algoritmo) que realice el método de la regla falsa. El algoritmo debe terminarse cuando la distancia entre los extremos del intervalo encontrado es menor que el número t dado o cuando el número de las iteraciones hechas es mayor que el número m dado.

   Entrada: una función f, dos números a y b tales que $a < b$ y la función toma valores de signos diferentes en a y b, el número máximo de pasos m y la "tolerancia" $t > 0$.

   Salida: una aproximación de un cero de f en $[a, b]$.

9. **Construcción del polinomio básico de Lagrange.** Escriba un algoritmo para calcular los coeficientes del polinomio básico de Lagrange. Puede usar la función MulPolynomBinom que calcula los coeficientes del producto de un polinomio por un binomio mónico.

   Entrada: números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferentes por pares, un índice $k \in \{1, \ldots, n\}$.

   Salida: lista de coeficientes del polinomio de grado $n - 1$ que toma valor 1 en el punto x_k y toma valor 0 en los puntos x_j, $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$.

10. **Algoritmo para calcular las diferencias divididas** necesarias para la fórmula de Newton.

    Entrada: números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferentes por pares, números $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

    Salida: diferencias divididas $d_1, d_2, \ldots, d_n$ correspondientes a una función f que toma los valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$d_1 = f[x_1], \qquad d_2 = f[x_1, x_2], \qquad \ldots, \qquad d_n = f[x_1, \ldots, x_n].$$

Problemas y ejercicios teóricos que se pueden incluir en el examen

1. **Violación de la ley asociativa en la aritmética con redondeo.** Consideremos los números escritos en la notación científica decimal con dos dígitos después del punto flotante. Denotemos por $\oplus$ a la operación de adición con el **redondeo al más cercano**. Por ejemplo,

   $$(9.83 \cdot 10^{-2}) \oplus (7.54 \cdot 10^{-3}) = \text{redond}(1.0584 \cdot 10^{-1}) = 1.06 \cdot 10^{-1}.$$

   Construya un ejemplo de **violación de la ley asociativa** para la operación $\oplus$. En otras palabras, encuentre algunos números a, b, c escritos en la notación científica decimal con dos dígitos después del punto flotante tales que

   $$(a \oplus b) \oplus c \neq a \oplus (b \oplus c).$$

2. **Violación de la ley distributiva en la aritmética con redondeo.** Consideremos los números escritos en la notación científica decimal con dos dígitos después del punto flotante. Denotemos por $\oplus$ a la operación de adición con el **redondeo al más cercano**. Por ejemplo,

   $$(9.83 \cdot 10^{-2}) \oplus (7.54 \cdot 10^{-3}) = \text{redond}(1.0584 \cdot 10^{-1}) = 1.06 \cdot 10^{-1}.$$

   Construya un ejemplo de **violación de la ley distributiva** para las operaciones $\oplus$ y $\otimes$. En otras palabras, encuentre algunos números a, b, c escritos en la notación científica decimal con dos dígitos después del punto flotante tales que

   $$(a \oplus b) \otimes c \neq (a \otimes c) \oplus (b \otimes c).$$

3. **Producto de matrices triangulares superiores.** Sean A y B dos matrices cuadradas triangulares superiores de tamaño $n \times n$. Demostrar que su producto AB también es triangular superior. Deducir una fórmula para las entradas diagonales de AB.

4. **Producto de matrices triangulares inferiores.** Sean A y B dos matrices cuadradas triangulares inferiores de tamaño $n \times n$. Demostrar que su producto AB también es triangular superior. Deducir una fórmula para las entradas diagonales de AB.

5. **Inversa de una matriz triangular superior.** Sea A una matriz cuadrada triangular superior de tamaño $n \times n$. Demuestre que la matriz A^{-1} también es triangular superior.

6. **Inversa de una matriz triangular inferior.** Sea A una matriz cuadrada triangular inferior de tamaño $n \times n$. Demuestre que la matriz A^{-1} también es triangular superior.

7. **Unicidad de la factorización LU.** Sea A una matriz cuadrada de orden n con entradas reales. Supongamos que A es invertible y posee una **factorización LU**. Demuestre que la factorización LU de la matriz A es **única**. Enuncie bien las propiedades de matrices triangulares superiores que se usan en la demostración.

8. **Existencia y unicidad del punto fijo de una función contractiva.** Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función que safisface las siguientes condiciones:

   a) $f(x) \in [a, b]$ para cualquier $x \in [a, b]$.

b) Existe un número $L > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|$ para cualesquiera $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Demuestre que existe un único punto $p \in [a, b]$ tal que $f(p) = p$.

9. **Existencia y unicidad del polinomio interpolante.** Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números reales diferentes a pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números reales. Demuestre que existe un único polinomio f de grado $\leqslant n - 1$ tal que $f(x_j) = y_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

10. **Deducción de la fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante.** Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números reales diferentes a pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números reales.

    I. Escriba la fórmula para el k-ésimo polinomio básico de Lagrange $L_k(x)$ para los puntos $x_1, \ldots, x_n$, enuncie la fórmula para $L_k(x_j)$ y explíquela.

    II. Escriba la fórmula de Lagrange para el polinomio interpolante $f(x)$ y muestre que este polinomio $f(x)$ en realidad resuelve el problema de interpolación.

Engrape aquí
No doble

Examen a Título de Suficiencia. Variante α.
Métodos Numéricos I, Ingeniería Matemática.

Representación de números en una computadora, aritmética con redondeo, multiplicación de matrices, sistemas de ecuaciones lineales, búsqueda de raíces de ecuaciones no lineales, método del punto fijo, interpolación polinomial.

Nombre:

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *15 %.*
El número a está dado en el formato **float32** ("single precision floating-point format") con dígitos hexadecimales. Conviértalo en la **notación científica decimal**. Para la conversión puede utilizar la fórmula $a = (-1)^s \cdot 1.f_2 \cdot 2^{e_2 - 127}$ tomando en cuenta que los números s, e y f ocupan 1, 8 y 23 dígitos binarios respectivamente.

$$a = \texttt{C1700000}_{16}.$$

Problema 2. *15 %.*
Sea $a = -0.0000213$ y sea $b = -0.00000925$. Escriba a y b en la **notación científica** y haga los siguientes cálculos con 2 dígitos decimales después del punto flotante usando el **redondeo al más cercano**. Calcule los **errores absolutos y relativos** de redondeo.

$$s := a \oplus b, \qquad d := a \ominus b, \qquad p := a \odot b.$$

Problema 3. *20 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ -9 & 7 & -1 & 6 \\ 6 & 12 & 9 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *15 %.*
Dados los puntos x_k y los valores y_k, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ calcule la **tabla de las diferencias divididas** y construya con la **fórmula de Newton** un **polinomio interpolante**, es decir un polinomio P de grado $\leqslant 3$ tal que $P(x_k) = y_k$ para todo $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Haga la comprobación.

$$x_0 = -2, \qquad x_1 = -1, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 2,$$
$$y_0 = -2, \qquad y_1 = 1, \qquad y_2 = -4, \qquad y_3 = 34.$$

Problema 5. *20 %.*
Consideremos la función $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{3}$ en el intervalo $[0, 4/3]$.

I. Analice la monotonía de f' y calcule $\max\limits_{x \in [0,4/3]} |f'(x)|$.

II. Analice la monotonía de f y calcule $\min\limits_{x \in [0,4/3]} f(x)$ y $\max\limits_{x \in [0,4/3]} f(x)$.

III. Usando los resultados de los incisos I y II muestre que la función f definida en el intervalo $[0, 4/3]$ es **contractiva**.

IV. Calcule el valor exacto del **punto fijo** p de la función f en el intervalo $[0, 4/3]$.

V. Haga dos iteraciones del método del punto fijo empezando con $x_0 = 0$. En otras palabras, calcule x_1 y x_2. Luego calcule $|x_0 - p|$, $|x_1 - p|$ y $|x_2 - p|$.

Problema 6. *20 %.*
Escriba el **algoritmo de Horner–Ruffini** que se usa para **dividir un polinomio** $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$ **entre un binomio mónico** de la forma $x - b$. Hay que calcular los coeficientes del cociente y el resto.

Entrada: una lista de números $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, un número b.

Salida: una lista de números $c_0, c_1, \ldots, c_{n-2}$ y un número r tales que se cumpla la siguiente igualdad de polinomios:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} = (x - b)(c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-2} x^{n-2}) + r.$$

Tarea adicional: calcular el número de multiplicaciones y divisiones que se realizan durante la ejecución del algoritmo.

Problema 7. *20 %.*
Existencia y unicidad del polinomio interpolante. Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números reales diferentes a pares y sean $y_1, \ldots, y_n$ algunos números reales. Demuestre que existe un único polinomio f de grado $\leqslant n - 1$ tal que $f(x_j) = y_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Engrape aquí
No doble

Examen a Título de Suficiencia. Variante β.
Métodos Numéricos I, Ingeniería Matemática.

Representación de números en una computadora, aritmética con redondeo, multiplicación de matrices, sistemas de ecuaciones lineales, búsqueda de raíces de ecuaciones no lineales, método del punto fijo, interpolación polinomial.

Nombre:

El examen dura 120 minutos.

Problema 1. *15 %.*
Escriba el siguiente número en el formato **float32** ("single precision floating-point format") con dígitos binarios y luego con hexadecimales. Para la conversión use la fórmula $a = (-1)^s \cdot 1.f_2 \cdot 2^{e_2 - 127}$ y recuerde que los números s, e y f ocupan 1, 8 y 23 dígitos binarios respectivamente.

$$a = -3.15 \cdot 10^1.$$

Problema 2. *15 %.*
Sea $a = 381000$ y sea $b = 913000$. Escriba a y b en la **notación científica** y haga los siguientes cálculos con 2 dígitos decimales después del punto flotante usando el **redondeo al más cercano**. Calcule los **errores absolutos y relativos** de redondeo.

$$s \coloneqq a \oplus b, \qquad d \coloneqq a \ominus b, \qquad p \coloneqq a \odot b.$$

Problema 3. *20 %.*
Encuentre una **factorización PLU** de la matriz A y haga la comprobación. **Resuelva el sistema** $Ax = b$ usando esta factorización PLU y haga la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 & 2 \\ -4 & 10 & 4 & 6 \\ -6 & 14 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Problema 4. *15 %.*
Resuelva el siguiente problema de la **interpolación de Hermite**, esto es, construya un polinomio P de grado $\leqslant 3$ que satisfaga las siguientes condiciones. Haga la comprobación.

$$P(-3) = 7, \qquad P(-1) = -9, \qquad P'(-1) = 4, \qquad P(2) = -33.$$

Problema 5. *20 %.*
Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 12}{8}$ en el intervalo $[0, 3]$.

I. Calcule $\max\limits_{x\in[0,3]} |f'(x)|$.

II. Calcule $\min\limits_{x\in[0,3]} f(x)$ y $\max\limits_{x\in[0,3]} f(x)$.

III. Usando los resultados de los incisos I y II muestre que la función f definida en el intervalo $[0, 3]$ es **contractiva**.

IV. Calcule el valor exacto del **punto fijo** de f en el intervalo $[0, 3]$.

V. Haga dos iteraciones del método del punto fijo empezando con $x_0 = 0$. En otras palabras, calcule x_1 y x_2.

Problema 6. *20 %.*
Escriba el **algoritmo del método del punto fijo** (llamado también el **método de iteración simple**). El algoritmo debe terminarse cuando la distancia entre dos aproximaciones sucesivas es menor que el número t dado o cuando el número de las iteraciones hechas es mayor que el número m dado.

Entrada: una función f, un punto inicial $x0$, el número máximo de pasos m y la "tolerancia" $t > 0$.

Salida: una aproximación del punto fijo; también puede regresar el número de iteraciones hechas.

Problema 7. *20 %.*
Producto de matrices triangulares superiores. Sean A y B dos matrices cuadradas triangulares superiores de tamaño $n \times n$. Demostrar que su producto AB también es triangular superior. Deducir una fórmula para las entradas diagonales de AB.