Teorema del valor intermedio (repaso)

Los siguientes dos teoremas son conocidos como teorema del valor intermedio, teorema de Bolzano–Cauchy, teorema de Bolzano.

1. Teorema del valor intermedio, caso especial.
Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua que toma valores con signos opuestos en los exremos del intervalo $[a,b]$, esto es, $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

2. Teorema del valor intermedio, caso general.
Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \neq f(b)$, esto es, $f(a) < f(b)$ o $f(a) > f(b)$. Entonces para todo u entre $f(a)$ y $f(b)$ existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = u$.

Ejemplos numéricos

3. Demuestre que la función f tiene al menos una raíz real y encuentre un intervalo de longitud menor o igual a 1 que contenga por lo menos una raíz de f.

$$f(x) = 2^x + 4x + 5.$$

Solución. Primero hagamos un pequeño análisis del comportamiento límite de la función f cuando su argumento tiende a $+\infty$ o $-\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty. \tag{1}$$

Este análisis no es obligatorio, pero puede simplificar un poco la búsqueda que sigue.

Vamos a buscar dos números enteros sucesivos n y $n+1$ tales que los signos de $f(n)$ y $f(n+1)$ sean diferentes. Calculemos $f(0)$:

$$f(0) = 2^0 + 4 \cdot 0 + 5 = 6 > 0.$$

De (1) al lado izquierdo de 0 la función debe cambiar el signo, por eso vamos a la izquierda del punto 0.

$$f(-1) = 2^{-1} + 4(-1) + 5 = \frac{1}{2} - 4 + 5 = \frac{3}{2} > 0;$$

$$f(-2) = 2^{-2} + 4(-2) + 5 = \frac{1}{4} - 8 + 5 = -\frac{11}{4} < 0.$$

La función f tiene signos diferentes en los puntos -2 y -1, además f es continua siendo la suma de tres funciones continuas. Por el teorema del valor medio, existe un punto $c \in (-2, -1)$ tal que $f(c) = 0$. $\square$

4. Demuestre que la función f tiene al menos una raíz real y encuentre un intervalo de longitud menor o igual a 1 que contenga por lo menos una raíz de f.

$$f(x) = \cos(2x) - 3x + 4.$$

Ejercicios teóricos

5. Explique el sentido geométrico del teorema del valor intermedio, primero en el caso especial y luego en el caso general.

6. Muestre que la primera versión del teorema es un caso especial de la segunda versión.

7. Demuestre el teorema del valor intermedio en el caso general usando el caso especial del mismo teorema.

8. Sean $f\colon [0,1] \to [0,1]$ y $g\colon [0,1] \to [0,1]$ funciones continuas tales que

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad g(0) = 1, \qquad g(1) = 0.$$

Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = g(c)$.

9. Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ y $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que

$$f(a) \le g(b) \qquad \text{y} \qquad f(b) \ge g(a).$$

Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

10. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = 3a + 5, \qquad \max_{x\in[a,b]} f(x) = 3b + 5.$$

Demuestre que existe por lo menos un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 3c + 5$.