Puntos fijos de funciones contractivas

Objetivos. Conocer el concepto de función contractiva. Estudiar el método de punto fijo y demostrar el teorema sobre su convergencia.

Requisitos. Teorema del valor intermedio, teorema del valor medio, funciones Lipschitz continuas.

Definición. Un *punto fijo* de una función g es un número p tal que $g(p) = p$.

1. Ejemplo. Encontramos los puntos fijos de la función $g(x) = x^2 - 6$. Consideramos la ecuación $x^2 - 6 = x$, esto es,

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Respuesta: 3 y -2.

El problema de la búsqueda de puntos fijos está relacionado con el problema de la búsqueda de raíces.

2. Pasar de un punto fijo a una raíz. Si p es un punto fijo de una función g, entonces la función $f(x) = g(x) - x$ tiene un cero en p.

3. Pasar de una raíz a un punto fijo. Si p es una raíz de f, entonces p es un punto fijo de $g(x) = x - f(x)$. También p es un punto fijo de la función $g_2(x) = x + 5f(x)$. Hay muchas formas de construir g con un punto fijo p.

4. Teorema (de la existencia del punto fijo para funciones continuas de una variable). Sea $g \in C([a,b],\mathbb{R})$ tal que $g(x) \in [a,b]$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces g tiene al menos un punto fijo en $[a,b]$.

Demostración. Si $g(a) = a$, entonces a es un punto fijo de g. Si $g(b) = b$, entonces b es un punto fijo de g.

Supongamos que $g(a) \neq a$ y $g(b) \neq b$. Tomando en cuenta que $g(a) \geq a$ y $g(b) \leq b$ obtenemos que

$$g(a) > a, \qquad g(b) < b.$$

Consideremos la función $f(x) \coloneqq g(x) - x$ en el intervalo $[a,b]$. Notemos que $f \in C[a,b]$,

$$f(a) = g(a) - a > 0, \qquad f(b) = g(b) - b < 0,$$

así que la función f cumple con las condiciones del teorema del valor intermedio en el intervalo $[a,b]$. Sea $c \in (a,b)$ un punto tal que $f(c) = 0$. Entonces $g(c) = c$. $\square$

5. Definición (función contractiva o contracción). Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Una *función contractiva* o *contracción* del intervalo $[a, b]$ es una función $g\colon [a, b] \to [a, b]$ con la propiedad de que existe un $k \in [0, 1)$ tal que para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$,

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \qquad |g(x_1) - g(x_2)| \le k|x_1 - x_2|. \tag{1}$$

En otras palabras, una función g se llama *contracción* del intervalo $[a, b]$ si $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$ y la función g cumple en el intervalo $[a, b]$ con una condición de Lipschitz con un coeficiente estrictamente menor a 1.

6. Nota: toda contracción es continua. La condición (1) implica que g es continua.

7. Si una función tiene derivada acotada, entonces es Lipschitz continua (repaso). Sea $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Supongamos que la derivada de g es acotada y denotemos por k el supremo de su valor absoluto:

$$k \coloneqq \sup_{x \in (a,b)} |g'(x)|,$$

Entonces la función g en el intervalo $[a, b]$ es Lipschitz continua con coeficiente k:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b] \qquad |g(x_2) - g(x_1)| \le k\,|x_2 - x_1|.$$

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in [a, b]$. Consideremos el caso si $x_1 < x_2$. Aplicamos el teorema del valor medio a la función g en el intervalo $[x_1, x_2]$. Por este teorema, existe un punto $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$g(x_2) - g(x_1) = g'(c)(x_2 - x_1).$$

Sacamos el módulo de ambos lados y aplicamos la definición del número k:

$$|g(x_2) - g(x_1)| = |g'(c)|\,|x_2 - x_1| \le k|x_2 - x_1|.$$

El caso $x_2 < x_1$ se considera de manera similar, en el caso $x_1 = x_2$ tenemos

$$|g(x_2) - g(x_1)| = 0 = k\,|x_2 - x_1|.$$

□

8. Teorema (de la unicidad del punto fijo de una función contractiva). Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y sea g una contracción del intervalo $[a, b]$. Entonces el punto fijo de g en $[a, b]$ es único.

9. Si p y p' son puntos fijos de g en $[a, b]$, entonces

$$|p' - p| = |g(p') - g(p)| \le k|p' - p|.$$

De allí $|p' - p|(1 - k) = 0$. Como $k < 1$, $p' = p$.

10. Ejemplo. Calcular los puntos fijos de la función

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{3}.$$

Determinar si g es una contracción del intervalo $[-1, 1]$; lel intervalo $[3, 4]$.

11. Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = x^5 + x - 1$ en el intervalo $[0, 1]$. Como $f(0) = -1$, $f(1) = 1$, f es continua y estrictamente creciente, existe una raíz única p de la función f en $[0, 1]$.

Nuestro objetivo es construir una función g que cumpla las condiciones del teorema y que tenga el punto fijo p. Probar las siguientes funciones:

- $g(x) = 1 - x^5$;
- $g(x) = \dfrac{1}{x^4 + 1}$;
- $g(x) = \sqrt[5]{1 - x}$.

12. Teorema (de la convergencia de iteraciones sucesivas de una función contractiva al punto fijo). Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea g una contracción del intervalo $[a, b]$. Entonces, para cualquier número $x_0 \in [a, b]$, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$x_n = g(x_{n-1}), \qquad n \geq 1,$$

converge al punto fijo de la función g en $[a, b]$.

13. Ejemplo. Verificar las hipótesis del teorema para la función

$$g(x) = \pi + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x/2)$$

en el intervalo $[0, 2\pi]$.

14. Corolario (cotas del error en la iteración de punto fijo).

$$|x_n - p| \leq k^n \max\{x_0 - a, b - x_0\}, \qquad |x_n - p| \leq \frac{k^n}{1 - k}|x_1 - x_0|.$$

15. Proposición (condición suficiente para la convergencia local del método de punto fijo). Sea $g \in C^1[a, b]$ y sea $p \in (a, b)$ un punto fijo de la función g tal que $|g'(p)| < 1$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que $[p - \delta, p + \delta] \subseteq [a, b]$ y g un contracción del intervalo $[p - \delta, p + \delta]$.

16. Proposición (condición suficiente para la divergencia del método de punto fijo). Sea $g \in C[a,b]$ tal que $|g'(x)| \geq 1$ para todo $x \in (a,b)$, sea $p \in [a,b]$ un punto fijo de g y sea $x_0 \in [a,b] \setminus \{p\}$. Entonces la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por $x_n = g(x_{n-1})$ no converge al punto p.

17. Mostrar gráficas para los casos cuando g crece o decrece, cuando $|g'| < 1$ o $|g'| \geq 1$.

18. Ejemplo. Contruya una función g y un intervalo $[a,b]$ tales que g cumpla con las condiciones del teorema sobre la convergencia del método de punto fijo y el punto fijo de g sea la solución positiva de la ecuación:

$$x^2 - \operatorname{sen} x = 0.$$

19. Ejercicio. Lo mismo para las ecuaciones $3x^2 - e^x = 0$ y $x - \cos x = 0$.

20. Tarea adicional (algoritmo babilónico como iteración de punto fijo). Sea $A > 0$ un número dado. Vamos a aplicar el método de punto fijo a la función

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right).$$

- Muestre que $\sqrt{A}$ es el único punto fijo positivo de g.
- Demuestre que g cumple con las condiciones del teorema sobre la convergencia de punto fijo en cualquier intervalo $[\sqrt{A}, B]$ donde $B > \sqrt{A}$.
- Muestre que $\frac{1+A}{2} \geq \sqrt{A}$ para todo $A > 0$. Por lo tanto, el punto $x_0 = \frac{1+A}{2}$ se puede usar como punto inicial.
- Muestre que la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por $x_{n+1} = g(x_n)$ para todo $n \geq 0$ converge para todo $x_0 > 0$. Indicación: explique que pasa cuando $0 < x_0 < \sqrt{A}$.