Matrices elementales

Objetivos. Matrices elementales permiten hablar sobre operaciones elementales en términos de la multiplicación de matrices.

Requisitos. Operaciones elementales, multiplicación de matrices.

1. Notación. Cada matriz elemental se obtiene de la matriz identidad al aplicar una operación elemental:

- $I \xrightarrow{R_p *= \lambda} E_*(p, \lambda)$, esto es, $E_*(p, \lambda)$ se obtiene de I al multiplicar la p-ésima fila por λ;
- $I \xrightarrow{R_p \leftrightarrow R_q} E_\leftrightarrow(p, q)$.
- $I \xrightarrow{R_p += \lambda R_q} E_+(p, q, \lambda)$.

El tamaño (el orden) de la matriz está claro desde el contexto.

2. Ejemplos. Ejemplos de matrices elementales de orden 3:

$$E_*(2,7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_\leftrightarrow(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_+(1,2,-7) = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Ejercicio. ¿Cuándo una matriz elemental $E_+(p, q, \lambda)$ es triangular superior? ¿Cuándo es triangular inferior?

Multiplicación por matrices elementales del lado izquierdo

4. Multiplicación por matrices elementales del lado izquierdo. Consideremos el producto de una matriz arbitraria A por una matriz elemental E del lado izquierdo, i.e. consideremos el producto EA. La multiplicación por las matrices elementales del lado izquierdo equivale a las operaciones elementales de filas:

- $E_*(p, \lambda)A$ se obtiene de A al aplicar la operación $R_p *= \lambda$;
- $E_\leftrightarrow(p, q)A$ se obtiene de A al aplicar la operación $R_p \leftrightarrow R_q$;
- $E_+(p, q, \lambda)A$ se obtiene de A al aplicar la operación $R_p += \lambda R_q$.

5. Ejemplos. Multiplicar del lado izquierdo por $E_*(3,-5)$ es lo mismo que multiplicar la tercera fila por -5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ -5a_{2,1} & -5a_{2,2} & -5a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Multiplicar del lado izquierdo por $E_{\leftrightarrow}(1,2)$ es lo mismo que intercambiar la primera y la segunda fila:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Multiplicar del lado izquierdo por $E_+(3,1,7)$ es lo mismo que sumar a la tercera fila la primera, multiplicada por 7:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,1}+7a_{1,1} & a_{3,2}+7a_{1,2} & a_{3,3}+7a_{1,3} \end{pmatrix}.$$

6. Ejercicios. Calcule los productos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

7. Ejemplos. Encuentre matrices elementales E_1 y E_2 tales que:

$$E_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -3 & 5 \\ 50 & 60 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -3 & 5 \\ 52 & 64 & 76 \end{pmatrix}, \quad E_2 \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Multiplicación por matrices elementales del lado derecho

8. Proposición (multiplicación por matrices elementales del lado derecho equivale a operaciones elementales de columnas). Sea $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{F})$. Entonces:

- $AE_*(p,\lambda)$ se obtiene de A al aplicar la operación $C_p *= \lambda$;
- $AE_{\leftrightarrow}(p,q)$ se obtiene de A al aplicar la operación $C_p \leftrightarrow C_q$;
- $AE_+(p,q,\lambda)$ se obtiene de A al aplicar la operación $C_q += \lambda C_p$.

9. Ejercicio. Demuestre la proposición usando la matriz transpuesta.

10. Ejemplos. Encuentre matrices elementales E_1 y E_2 tales que:

$$\begin{pmatrix} 20 & -2 & 1 \\ 30 & 5 & -2 \\ 40 & 7 & -3 \end{pmatrix} E_1 = \begin{pmatrix} 19 & -2 & 1 \\ 32 & 5 & -2 \\ 43 & 7 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix} E_2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matrices inversas de matrices elementales

11. Matrices inversas de matrices elementales. Sabemos que las operaciones elementales son invertibles:

- Para $R_p *= \lambda$, donde $\lambda \neq 0$, la operación inversa es $R_p *= \frac{1}{\lambda}$.
- $R_p \leftrightarrow R_q$ es la operación inversa a sí misma;
- Para $R_p += \lambda R_q$ la operación inversa es $R_p += (-\lambda) R_q$.

Por lo tanto:

- $E_*(p, \lambda)^{-1} = E_*(p, 1/\lambda)$;
- $E_\leftrightarrow(p, q)^{-1} = E_\leftrightarrow(p, q)$;
- $E_+(p, q, \lambda)^{-1} = E_+(p, q, -\lambda)$.

12. Ejemplos. Calcule las matrices inversas de las siguientes matrices elementales:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices transpuestas de matrices elementales

13. Ejercicio. Escriba las matrices transpuestas de las matrices de orden 4:

$$E_*(3, 7), \quad E_\leftrightarrow(2, 4), \quad E_\leftrightarrow(1, 4), \quad E_+(1, 3, -9), \quad E_+(4, 2, -5).$$

14. Proposición (matrices transpuestas de matrices elementales).

1. $E_*(p, \lambda)^T = E_*(p, \lambda)$, i.e. la matriz $E_*(p, \lambda)$ es simétrica.
2. $E_\leftrightarrow(p, q)^T = E_\leftrightarrow(p, q)$, i.e. la matriz $E_\leftrightarrow(p, q)$ es simétrica.
3. $E_+(p, q, \lambda)^T = E_+(q, p, \lambda)$.