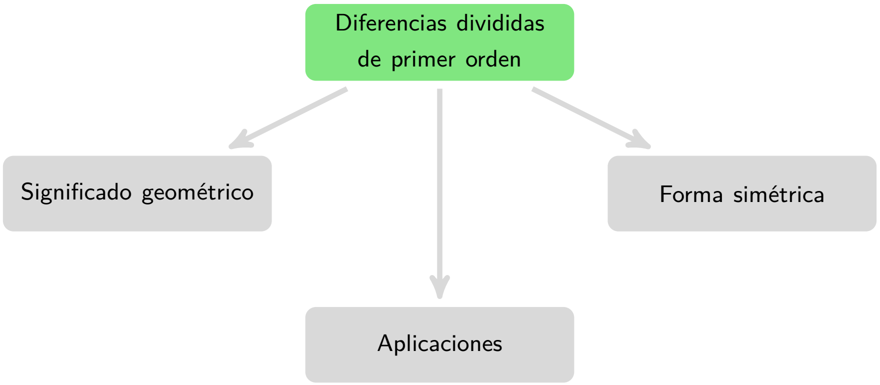
Diferencias divididas de primer orden

Egor Maximenko
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

1 de septiembre de 2016


Diferencias divididas de primer orden
Significado geométrico
Aplicaciones
Forma simétrica

Definición de la diferencia dividida de primer orden

Sean

- X un subconjunto de $\mathbb{R}$,
- $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función,
- $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$.

Definición de la diferencia dividida de primer orden

Sean

- X un subconjunto de $\mathbb{R}$,
- $f \colon X \to \mathbb{R}$ una función,
- $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$.

$$f[x_1, x_2] := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Definición de la diferencia dividida de primer orden

Sean

- X un subconjunto de $\mathbb{R}$,
- $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función,
- $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$.

$$\boxed{f[x_1, x_2] := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.}$$

$$\frac{\text{incremento de la función}}{\text{incremento del argumento}}$$

Definición de la diferencia dividida de primer orden

Sean

X un subconjunto de $\mathbb{R}$,

$f\colon X \to \mathbb{R}$ una función,

$x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$.

$$f[x_1, x_2] := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

$$\frac{\text{incremento de la función}}{\text{incremento del argumento}}$$

Otra notación:

$$\Delta_f(x_1, x_2), \qquad D(f, x_1, x_2), \qquad [x_1, x_2]f, \qquad [x_1, x_2; f], \qquad D[x_1, x_2]f, \qquad \ldots$$

Ejemplo 1.

$$\exp[0.4, 0.7] = \frac{\exp(0.7) - \exp(0.4)}{0.7 - 0.4}$$

Ejemplo 1.

$$\exp[0.4, 0.7] = \frac{\exp(0.7) - \exp(0.4)}{0.7 - 0.4} \approx \frac{2.01375 - 1.49182}{0.3} \approx 1.7398.$$

Ejemplo 1.

$$\exp[0.4, 0.7] = \frac{\exp(0.7) - \exp(0.4)}{0.7 - 0.4} \approx \frac{2.01375 - 1.49182}{0.3} \approx 1.7398.$$

Ejemplo 2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^3, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$

$$f[a, b] = \frac{b^3 - a^3}{b - a}$$

Ejemplo 1.

$$\exp[0.4, 0.7] = \frac{\exp(0.7) - \exp(0.4)}{0.7 - 0.4} \approx \frac{2.01375 - 1.49182}{0.3} \approx 1.7398.$$

Ejemplo 2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^3, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$

$$f[a, b] = \frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{a^3 - b^3}{a - b}$$

Ejemplo 1.

$$\exp[0.4, 0.7] = \frac{\exp(0.7) - \exp(0.4)}{0.7 - 0.4} \approx \frac{2.01375 - 1.49182}{0.3} \approx 1.7398.$$

Ejemplo 2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^3, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$

$$f[a, b] = \frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{a^3 - b^3}{a - b} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{a - b}$$

Ejemplo 1.

$$\exp[0.4, 0.7] = \frac{\exp(0.7) - \exp(0.4)}{0.7 - 0.4} \approx \frac{2.01375 - 1.49182}{0.3} \approx 1.7398.$$

Ejemplo 2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^3, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$

$$f[a, b] = \frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{a^3 - b^3}{a - b} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{a - b} = a^2 + ab + b^2$$

Ejemplo 1.

$$\exp[0.4, 0.7] = \frac{\exp(0.7) - \exp(0.4)}{0.7 - 0.4} \approx \frac{2.01375 - 1.49182}{0.3} \approx 1.7398.$$

Ejemplo 2. $\quad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^3, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$

$$f[a, b] = \frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{a^3 - b^3}{a - b} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{a - b} = a^2 + ab + b^2 = \sum_{k=0}^{2} a^{2-k} b^k.$$

Ejemplo 3. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\sin[0, x] = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$$

Ejemplo 3. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\sin[0, x] = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x}$$

Ejemplo 3. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\sin[0, x] = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x} = \operatorname{sinc}(x).$$

la función
seno cardinal

Ejemplo 3. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\sin[0, x] = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x} = \operatorname{sinc}(x).$$

la función
seno cardinal

Ejemplo 4. Sean $a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b$.

$$\cos[a, b] = \frac{\cos(b) - \cos(a)}{b - a}$$

Ejemplo 3. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\sin[0, x] = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x} = \operatorname{sinc}(x).$$

la función
seno cardinal

Ejemplo 4. Sean $a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b$.

$$\cos[a, b] = \frac{\cos(b) - \cos(a)}{b - a} = \frac{2 \sin \frac{a-b}{2} \sin \frac{a+b}{2}}{b - a}$$

Ejemplo 3. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\sin[0,x] = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x} = \operatorname{sinc}(x).$$

la función
seno cardinal

Ejemplo 4. Sean $a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b$.

$$\cos[a,b] = \frac{\cos(b) - \cos(a)}{b - a} = \frac{2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}}{b-a}$$

$$= -\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\frac{a-b}{2}}\sin\frac{a+b}{2}$$

Ejemplo 3. Sea $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\sin[0, x] = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x} = \operatorname{sinc}(x).$$

la función
seno cardinal

Ejemplo 4. Sean $a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b$.

$$\cos[a, b] = \frac{\cos(b) - \cos(a)}{b - a} = \frac{2\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}}{b - a}$$

$$= -\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\frac{a-b}{2}}\,\sin\frac{a+b}{2} = -\operatorname{sinc}\frac{a-b}{2}\,\sin\frac{a+b}{2}.$$

Ejercicio 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$

$$f[a, b] =$$

Ejercicio 2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4, \quad a, b, \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$

$$f[a, b] =$$

Ejercicio 3. $a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$

$$\sin[a, b] =$$

Ejercicio 4. $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad a, b \geq 0, \quad a \neq b.$

$$f[a, b] =$$

Ejercicio 1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$

$$f[a, b] =$$

Ejercicio 2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4, \quad a, b, \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$

$$f[a, b] =$$

Sugiero poner una pausa
y resolver los ejercicios

Ejercicio 3. $a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$

$$\sin[a, b] =$$

Ejercicio 4. $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad a, b \geq 0, \quad a \neq b.$

$$f[a, b] =$$

Ejercicio 1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$

$$f[a, b] = a + b.$$

Ejercicio 2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4, \quad a, b, \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$

$$f[a, b] = a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3 = \sum_{k=0}^{3} a^{3-k} b^k.$$

Ejercicio 3. $a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq b.$

$$\sin[a, b] = \operatorname{sinc} \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}.$$

Ejercicio 4. $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad a, b \geq 0, \quad a \neq b.$

$$f[a, b] = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Ejercicio 5. $f(x) = x^n$.

$$f[a, b] =$$

Ejercicio 6.

$$\operatorname{tg}[a, b] =$$

Ejercicio 7. $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

$$f[a, b] =$$

Ejercicio de programación

Programar la función dd1 en algún lenguaje de programación.
Entrada: f, a, b.
Salida: el valor de la diferencia dividida $f[a, b]$.

Ejercicio de programación

Programar la función dd1 en algún lenguaje de programación.
Entrada: f, a, b.
Salida: el valor de la diferencia dividida $f[a, b]$.

Realización en el lenguaje GNU Octave (similar a MATLAB)

Archivo `dd1.m`:

```
function result = dd1(f, a, b),
   result = (f(b) - f(a)) / (b - a);
endfunction
```

Ejercicio de programación

Programar la función dd1 en algún lenguaje de programación.
Entrada: f, a, b.
Salida: el valor de la diferencia dividida $f[a, b]$.

Realización en el lenguaje GNU Octave (similar a MATLAB)

Archivo `dd1.m`:

```
function result = dd1(f, a, b),
   result = (f(b) - f(a)) / (b - a);
endfunction
```

Pruebas (en el intérprete de GNU Octave):

```
> dd1(@exp, 0.4, 0.7)
```

Ejercicio de programación

Programar la función dd1 en algún lenguaje de programación.
Entrada: f, a, b.
Salida: el valor de la diferencia dividida $f[a, b]$.

Realización en el lenguaje GNU Octave (similar a MATLAB)

Archivo `dd1.m`:

```
function result = dd1(f, a, b),
   result = (f(b) - f(a)) / (b - a);
endfunction
```

Pruebas (en el intérprete de GNU Octave):

```
> dd1(@exp, 0.4, 0.7)
    ans =  1.7398
```

Ejercicio de programación

Programar la función dd1 en algún lenguaje de programación.
Entrada: f, a, b.
Salida: el valor de la diferencia dividida $f[a, b]$.

Realización en el lenguaje GNU Octave (similar a MATLAB)

Archivo `dd1.m`:

```
function result = dd1(f, a, b),
   result = (f(b) - f(a)) / (b - a);
endfunction
```

Pruebas (en el intérprete de GNU Octave):

```
> dd1(@exp, 0.4, 0.7)
      ans =  1.7398
> h = @(x) cos(x) + x;
```

Ejercicio de programación

Programar la función dd1 en algún lenguaje de programación.
Entrada: f, a, b.
Salida: el valor de la diferencia dividida $f[a, b]$.

Realización en el lenguaje GNU Octave (similar a MATLAB)

Archivo `dd1.m`:

```
function result = dd1(f, a, b),
   result = (f(b) - f(a)) / (b - a);
endfunction
```

Pruebas (en el intérprete de GNU Octave):

```
> dd1(@exp, 0.4, 0.7)
    ans =  1.7398
> h = @(x) cos(x) + x;
> dd1(h, 2, 3)
```

Ejercicio de programación

Programar la función dd1 en algún lenguaje de programación.
Entrada: f, a, b.
Salida: el valor de la diferencia dividida $f[a, b]$.

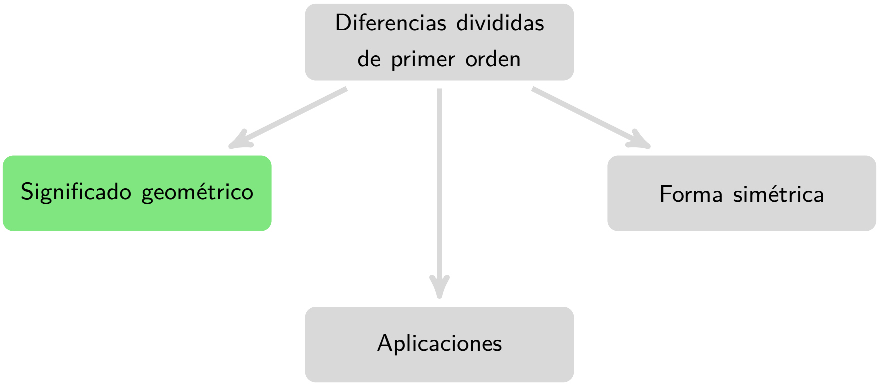
Realización en el lenguaje GNU Octave (similar a MATLAB)

Archivo `dd1.m`:

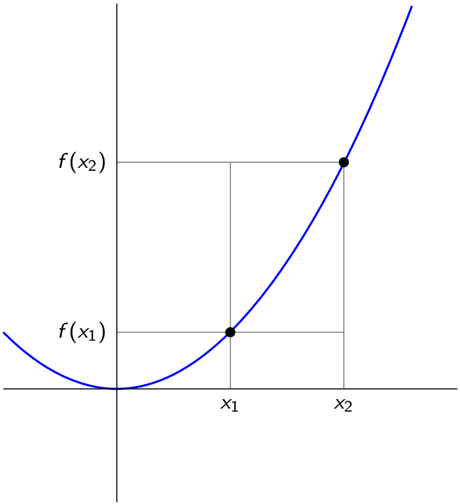
```
function result = dd1(f, a, b),
   result = (f(b) - f(a)) / (b - a);
endfunction
```

Pruebas (en el intérprete de GNU Octave):

```
> dd1(@exp, 0.4, 0.7)
     ans =  1.7398
> h = @(x) cos(x) + x;
> dd1(h, 2, 3)
     ans =  0.42615
```


Diferencias divididas de primer orden
Significado geométrico
Aplicaciones
Forma simétrica

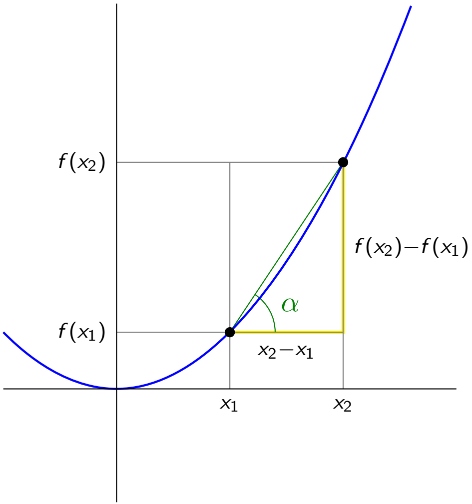
Significado geométrico: la pendiente de la secante



$f(x) = x^2$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$,

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{1 - 0.25}{1 - 0.5} = \frac{0.75}{0.5} = 1.5.$$

Significado geométrico: la pendiente de la secante



$f(x) = x^2$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$,

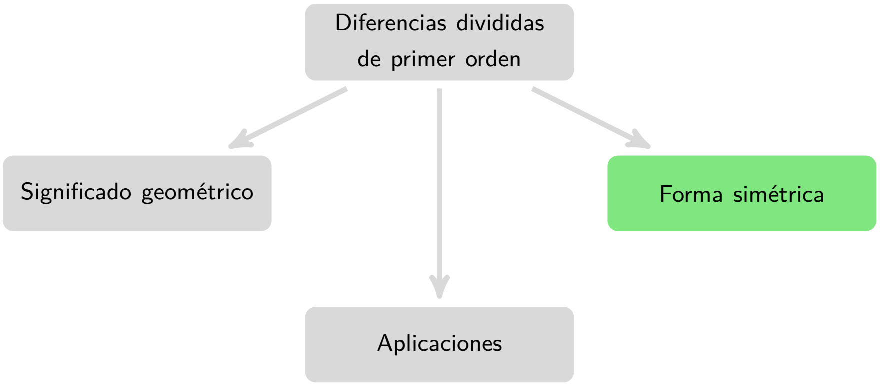
$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{1 - 0.25}{1 - 0.5} = \frac{0.75}{0.5} = 1.5.$$

La pendiente de la secante
es la tangente del ángulo α:

$$\operatorname{tg} \alpha = f[x_1, x_2].$$

Ecuación de la secante:

$$y - f(x_1) = f[x_1, x_2]\,(x - x_1).$$


Diferencias divididas de primer orden
Significado geométrico
Forma simétrica
Aplicaciones

Propiedad simétrica

$$f[x_2, x_1] = f[x_1, x_2].$$

Demostración.

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f[x_1, x_2].$$

$\square$

Forma expandida (simétrica)

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}.$$

Forma expandida (simétrica)

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}.$$

Buen momento para
detener la presentación
y demostrar la fórmula

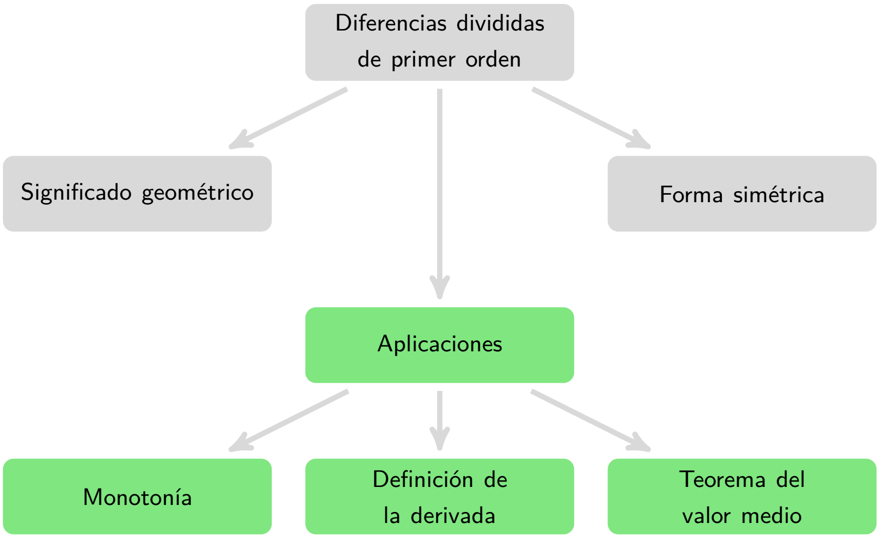
Forma expandida (simétrica)

$$\boxed{f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}.}$$

Demostración.

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}.$$

□


Diferencias divididas de primer orden
Significado geométrico
Forma simétrica
Aplicaciones
Monotonía
Definición de la derivada
Teorema del valor medio

Monotonía

en términos de las diferencias divididas de primer orden

Sean X un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función.

Se dice que f es creciente en X (en el sentido no estricto) si

Monotonía

en términos de las diferencias divididas de primer orden

Sean X un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función.

Se dice que f es creciente en X (en el sentido no estricto) si

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad \Bigl(x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2)\Bigr).$$

Monotonía

en términos de las diferencias divididas de primer orden

Sean X un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función.

Se dice que f es creciente en X (en el sentido no estricto) si

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad \Big(x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2) \Big).$$

Criterio de función creciente en términos de las diferencias divididas de primer orden:

f es creciente en X $\qquad \Longleftrightarrow$

Monotonía

en términos de las diferencias divididas de primer orden

Sean X un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función.

Se dice que f es creciente en X (en el sentido no estricto) si

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad \big(x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2)\big).$$

Criterio de función creciente en términos de las diferencias divididas de primer orden:

f es creciente en X $\quad\Longleftrightarrow$

Buen momento para
detener la presentación
y escribir el criterio

Monotonía

en términos de las diferencias divididas de primer orden

Sean X un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función.

Se dice que f es creciente en X (en el sentido no estricto) si

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad \Big(x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2) \Big).$$

Criterio de función creciente en términos de las diferencias divididas de primer orden:

$$f \text{ es creciente en } X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x_1, x_2 \in X \qquad \Big(x_1 \ne x_2 \quad \Longrightarrow \quad f[x_1, x_2] \ge 0 \Big).$$

Monotonía

en términos de las diferencias divididas de primer orden

Sean X un subconjunto de $\mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función.

Se dice que f es creciente en X (en el sentido no estricto) si

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad \Big(x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2)\Big).$$

Criterio de función creciente en términos de las diferencias divididas de primer orden:

$$f \text{ es creciente en } X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x_1, x_2 \in X \qquad \Big(x_1 \ne x_2 \quad \Longrightarrow \quad f[x_1, x_2] \ge 0\Big).$$

Idea de demostración:

- Para $x_1 < x_2$, la condición $f(x_1) \le f(x_2)$ es equivalente a $f[x_1, x_2] \ge 0$.
- Para $x_1 > x_2$, usar la simetría: $f[x_1, x_2] = f[x_2, x_1]$.

Definición de la derivada

en términos de las diferencias divididas de primer orden

Sean X un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función, $a \in X$.

Entonces la derivada de f en el punto a se define como el siguiente límite:

Definición de la derivada

en términos de las diferencias divididas de primer orden

Sean X un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función, $a \in X$.

Entonces la derivada de f en el punto a se define como el siguiente límite:

$$f'(a) =$$

Buen momento para
detener la presentación
y escribir la fórmula

Definición de la derivada

en términos de las diferencias divididas de primer orden

Sean X un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función, $a \in X$.

Entonces la derivada de f en el punto a se define como el siguiente límite:

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f[a, x].$$

Definición de la derivada

en términos de las diferencias divididas de primer orden

Sean X un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función, $a \in X$.

Entonces la derivada de f en el punto a se define como el siguiente límite:

$$f'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f[a, x].$$

Ejercicio. Recordar el sentido geométrico.
¿Qué pasa con las pendientes de las secantes cuando x se acerca al punto a?

Teorema del valor medio (de Lagrange)

en términos de las diferencias divididas de primer orden

Sean $a < b$ y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

- f es continua en $[a, b]$,
- f es derivable en (a, b).

Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

Teorema del valor medio (de Lagrange)

en términos de las diferencias divididas de primer orden

Sean $a < b$ y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

- f es continua en $[a, b]$,
- f es derivable en (a, b).

Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

Buen momento para
detener la presentación
y escribir la fórmula

Teorema del valor medio (de Lagrange)

en términos de las diferencias divididas de primer orden

Sean $a < b$ y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

- f es continua en $[a, b]$,
- f es derivable en (a, b).

Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f[a, b] = f'(c).$$

Teorema del valor medio (de Lagrange)

en términos de las diferencias divididas de primer orden

Sean $a < b$ y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

- f es continua en $[a, b]$,
- f es derivable en (a, b).

Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f[a, b] = f'(c).$$

Ejercicio. Recordar el sentido geométrico.

Tareas creativas: diferencias divididas de segundo orden

$$f[x_1, x_2, x_3] := \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}.$$

- Escribir $f[x_1, x_2, x_3]$ en una forma expandida simétrica:

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f(x_1)}{?} + \frac{f(x_2)}{?} + \frac{f(x_3)}{?}.$$

- Suponiendo que f es dos veces derivable en un punto a, calcular el límite

$$\lim_{\substack{x_1, x_2, x_3 \to a, \\ x_1 < x_2 < x_3}} f[x_1, x_2, x_3].$$

- Suponiendo que f es bastante suave y $x_1 < x_2 < x_3$,
  expresar $f[x_1, x_2, x_3]$ a través de $f''(c)$, donde $c \in (x_1, x_3)$.