Interpolación segmentaria cúbica (splines cúbicos)

Definición. El *interpolante segmentario cúbico* (o *interpolante de trazador cúbico*, o *spline cúbico*) correspondiente a los puntos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ y los valores $y_0, \ldots, y_n$, es una función S definida en $[x_0, x_n]$ que cumple con las condiciones siguientes:

1. Para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, la restricción $S_i = S|_{[x_i, x_{i+1}]}$ es un polinomio cúbico:
$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \qquad \forall x \in [x_i, x_{i+1}].$$

2. $S(x_i) = y_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, esto es
$$S_i(x_i) = y_i \qquad \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}. \tag{1}$$
y
$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \qquad \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}. \tag{2}$$

3. $S \in C^2[x_0, x_n]$. Esto significa que para todo $i \in \{0, \ldots, n-2\}$ la derivada izquierda en el punto x_{i+1} coincide con la derivada derecha en el mismo punto:
$$S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1}) \qquad \forall i \in \{0, \ldots, n-2\}, \tag{3}$$
y la segunda derivada izquierda en el punto x_{i+1} coincide con la segunda derivada derecha en este punto:
$$S''_{i+1}(x_{i+1}) = S''_i(x_{i+1}) \qquad \forall i \in \{0, \ldots, n-2\}. \tag{4}$$

4. Se cumple una de las siguientes condiciones de frontera:
   - *frontera libre* o *frontera natural*, *splines cúbicos naturales*:
   $$S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n) = 0; \tag{5}$$
   - *frontera sujeta*:
   $$S'(x_0) = \alpha, \qquad S'(x_n) = \beta, \tag{6}$$
   donde α y β son números dados.

1. Observación: el número de los coeficientes incógnitos es igual al número de las condiciones. El número total de los coeficientes incognitos a_i, b_i, c_i, d_i es $4n$, y el número de las condiciones es igual a
$$\underbrace{n}_{(1)} + \underbrace{n}_{(2)} + \underbrace{n-1}_{(3)} + \underbrace{n-1}_{(4)} + \underbrace{2}_{(5)\text{ o }(6)} = 4n.$$

Por eso podemos esperar que los coeficientes existen y están determinados en manera única.

2. Teorema (existencia y unicidad del interpolante segmentario cúbico natural). Dados puntos $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ y valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, siempre existe un único interpolante segmentario cúbico natural que corresponde a estos puntos y valores.

3. Construcción de trazadores cúbicos. 1. La condición (1) implica que $a_i = y_i$.

2. Es cómodo extender (3) y (4) al caso $i = n-1$. La condición de la frontera $S''(x_n) = 0$ significa que $c_n = 0$.

3. Denotemos $x_{i+1} - x_i$ por h_i. Usando la condición (4) (sobre las segundas derivadas), despejamos d_i:

$$d_i = \frac{1}{3h_i}\left(c_{i+1} - c_i\right) \qquad (i \in \{0, \ldots, n-1\}) \tag{7}$$

4. Escribamos la condición (2) y sustituimos d_i por la expresión (7):

$$y_{i+1} = y_i + b_i h_i + \frac{1}{3}(2c_i + c_{i+1})h_i^2.$$

Despejemos b_i:

$$b_i = \frac{1}{h_i}\left(y_{i+1} - y_i\right) - \frac{h_i}{3}\left(2c_i + c_{i+1}\right). \tag{8}$$

5. Escribamos la condición (3):

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}.$$

Sustituyamos d_i por la expresión (7):

$$b_i + (c_{i+1} + c_i)h_i = b_{i+1}.$$

Cambiamos el índice i por $i-1$:

$$b_{i-1} + (c_i + c_{i-1})h_{i-1} = b_i.$$

Sustituyamos b_i por la expresión (8):

$$\frac{1}{h_{i-1}}\left(y_i - y_{i-1}\right) - \frac{h_{i-1}}{3}\left(2c_{i-1} + c_i\right) + (c_i + c_{i-1})h_{i-1} = \frac{1}{h_i}\left(y_{i+1} - y_i\right) - \frac{h_i}{3}\left(2c_i + c_{i+1}\right).$$

Multipliquemos por 3:

$$h_i\left(2c_i + c_{i+1}\right) - h_{i-1}\left(2c_{i-1} + c_i\right) + 3h_{i-1}(c_i + c_{i-1}) = \frac{3}{h_i}\left(y_{i+1} - y_i\right) - \frac{3}{h_{i-1}}\left(y_i - y_{i-1}\right).$$

Simplifiquemos:

$$\boxed{h_{i-1}c_{i-1} + (2h_{i-1} + 2h_i)c_i + h_i c_{i+1} = \frac{3}{h_i}\left(y_{i+1} - y_i\right) - \frac{3}{h_{i-1}}\left(y_i - y_{i-1}\right).} \tag{9}$$

Las condiciones de frontera libre significan que $c_0 = 0$ y $c_n = 0$. Para $n = 5$, el sistema tiene la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2h_0 + 2h_1 & h_1 & 0 & 0 \\ h_1 & 2h_1 + 2h_2 & h_2 & 0 \\ 0 & h_2 & 2h_2 + 2h_3 & h_3 \\ 0 & 0 & h_3 & 2h_3 + 2h_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3(y_2-y_1)}{h_1} - \frac{3(y_1-y_0)}{h_0} \\ \frac{3(y_3-y_2)}{h_2} - \frac{3(y_2-y_1)}{h_1} \\ \frac{3(y_4-y_3)}{h_3} - \frac{3(y_3-y_2)}{h_2} \\ \frac{3(y_5-y_4)}{h_4} - \frac{3(y_4-y_3)}{h_3} \end{bmatrix}.$$

La matriz del sistema es *estrictamente diagonal dominante*. Es significa que en cada renglón el valor absoluto de la entrada diagonal es estrictamente mayor que la suma de los valores absolutos de las demás entradas. Por lo tanto, el sistema tiene una solución única y se resuelve al aplicar el método de Gauss con pivotes diagonales.

4. Ejercicio. Escriba el sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes c_1, c_2, c_3, que corresponde a los puntos

$$x_0 = -2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 5$$

y los valores

$$y_0 = 4, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 5, \quad y_4 = 2.$$

5. Programación. Escriba una función CubicSplineCoefs con argumentos x, y que calcule las listas de los coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i y regresa la lista de las listas a, b, c, d. Use la función SolveTriDiag que resuelva sistemas de ecuaciones lineales tridiagonales.

6. Programación. Escriba una función CubicSpline con argumentos x, $\mathtt{coefs}$, x que calcule el valor del interpolante segmentario cúbico natural en el punto dado x. Aquí $\mathtt{coefs}$ es la lista que consiste de las listas a, b, c, d.