Convergencia acelerada,
método Δ^2 de Aitken y método de Steffensen

Objetivos. Sabemos que el método de iteración de punto fijo converge linealmente bajo ciertas condiciones (cuando g es bastante suave y $g'(p) \neq 0$). Resulta que en el caso de convergencia lineal existen métodos para acelerar la convergencia. Vamos a considerar los métodos de Aitken y de Steffensen.

Requisitos. Método de iteración de punto fijo.

Diferencias progresivas de primer y segundo órdenes de una sucesión

Necesitamos unos conceptos auxiliares para esciribir en forma breve la fórmula de Aitken.

1. Definición (diferencias progresivas de primer orden). Dada la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, la *diferencia progresiva* Δx_n está definida por

$$(\Delta x)_n = x_{n+1} - x_n \qquad (n \geq 0).$$

2. Definición (diferencias progresivas de segundo orden). Dada la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, la *diferencia progresiva de segundo orden* $(\Delta^2 x)_n$ se define como $(\Delta(\Delta x))_n$:

$$(\Delta^2 x)_n = (\Delta x)_{n+1} - (\Delta x)_n.$$

Es fácil ver que

$$(\Delta^2 x)_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n.$$

3. Nota acerca de la notación. En muchos libros se usa la notación Δx_n o $\Delta(x_n)$. La notación $(\Delta x)_n$ es más correcta porque el valor de $(\Delta x)_n$ depende no sólo de un elemento x_n, sino de la sucesión entera $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. Uno puede usar también la notación Δx_n pero tiene que recordar que la prioridad del símbolo Δ es mayor que del índice $_n$.

4. Ejemplo. Calculemos las diferencias progresivas $(\Delta x)_n$ y $(\Delta^2 x)_n$ para la sucesión $x_n = n^2$.

$$\begin{aligned}(\Delta x)_n &= x_{n+1} - x_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1,\\ (\Delta^2 x)_n &= (\Delta x)_{n+1} - (\Delta x)_n = \big(2(n+1)+1\big) - \big(2n+1\big) = 2.\end{aligned}$$

5. Ejercicio. Calcule las diferencias $(\Delta x)_n$ y $(\Delta^2 x)_n$ para la sucesión $\quad x_n = \dfrac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Método de Aitken

6. Deducción de la fórmula de Aitken. Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión linealmente convergente al punto p y las diferencias $x_n - p$ tienen el mismo signo, entonces para valores suficientemente grandes de n tenemos

$$\frac{x_{n+1} - p}{x_n - p} \approx \frac{x_{n+2} - p}{x_{n+1} - p}.$$

Vamos a despejar p de esta igualdad aproximada.

$$\begin{aligned}
x_{n+1}^2 - 2px_{n+1} + p^2 &\approx x_{n+2}x_n - px_{n+2} - px_n + p^2, \\
p(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) &\approx x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2, \\
p(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) &\approx (x_n x_{n+2} - 2x_n x_{n+1} + x_n^2) - (x_{n+1} - 2x_n x_{n+1} + x_n)^2, \\
p(\Delta^2 x)_n &\approx x_n(\Delta^2 x)_n - \big((\Delta x)_n\big)^2.
\end{aligned}$$

De aquí

$$p \approx x_n - \frac{((\Delta x)_n)^2}{(\Delta^2 x)_n}.$$

7. Teorema sobre la convergencia del método de Aitken (sin demostración). Supongamos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión que converge linealmente al límite p y que, para todos los valores suficientemente grandes de n, tenemos $(x_n - p)(x_{n+1} - p) > 0$. Entonces, la sucesión $\{\hat{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$, definida por:

$$\hat{x}_n \coloneqq x_n - \frac{((\Delta x)_n)^2}{(\Delta^2 x)_n},$$

converge a p con mayor rapidez que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en el sentido de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{x}_n - p}{x_n - p} = 0.$$

Método de Steffensen

8. Método de Steffensen. El método de Steffensen se puede considerar como una combinación del método de punto fijo y del método de Aitken. Para construir la sucesión de las aproximaciones $\{x_n\}$, en todo tercer paso se usa la fórmula de Aitken, y en los demás pasos se aplica la fórmula $x_n := g(x_{n-1})$:

$$
\begin{array}{lll}
x_0, & x_1 := g(x_0), & x_2 := g(x_1), \\
x_3 := x_0 - \dfrac{(\Delta x)_0^2}{(\Delta^2 x)_0}, & x_4 := g(x_3), & x_5 := g(x_4), \\
x_6 := x_3 - \dfrac{(\Delta x)_3^2}{(\Delta^2 x)_3}, & x_7 := g(x_5), & x_8 := g(x_6), \\
\ldots & &
\end{array}
$$

9. Teorema sobre la convergencia del método de Steffensen (sin demostración). Supongamos que $x = g(x)$ tiene la solución p con $g'(p) \neq 1$, y existe $\delta > 0$ tal que $g \in C^3[p - \delta, p + \delta]$. Entonces el método de Steffensen converge cuadráticamente para cualquier $x_0 \in [p - \delta, p + \delta]$.

10. Ejemplo para el método de Steffensen. Para la función $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$ y la aproximación inicial $x_0 = 1$ calcular $\{x_n\}_{n=0}^5$ usando el método de iteración de punto fijo. Luego calcular $\{x_n\}_{n=0}^5$ usando el método de Steffensen. En ambos casos, calcular la diferencia $|x_5 - x_4|$ y comparar los resultados. Indicación: hacer todos los cálculos con no menos que 6 dígitos decimales después del punto flotante.

11. Tarea optativa: programar el método de Steffensen. Escribir una función con argumentos `g`, `x0`, `xtol`, `pmax`, que realice el método de Steffensen. La función tiene que regresar el par cuya primera componente `x` es la última aproximación al punto fijo y la segunda componente `n` muestra cuantas veces se calcularon los valores de la función g.