Ejercicios: análisis de una función contractiva

Consideremos la función $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla

$$f(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{4} + \frac{39}{16}.$$

¿Qué valores toma f?

1. Calcular la derivada de f: $\quad f'(x) =$

2. Determinar qué signos puede tener f' en el dominio de f, esto es, en el intervalo $[1,3]$:

- $f'(x) = 0$ para $x =$
- $f'(x) > 0$ para $x \in$
- $f'(x) < 0$ para $x \in$

3. Hacer conclusiones acerca de la monotonía de la función f en partes del intervalo $[1,3]$:

- f crece en ...
- f decrece en ...

4. Calcular los valores de f en los extremos del dominio de f (es decir, en los puntos 1 y 3) y en los puntos donde se cambia el carácter de monotonía de f (es decir, en sus máximos y mínimos locales):

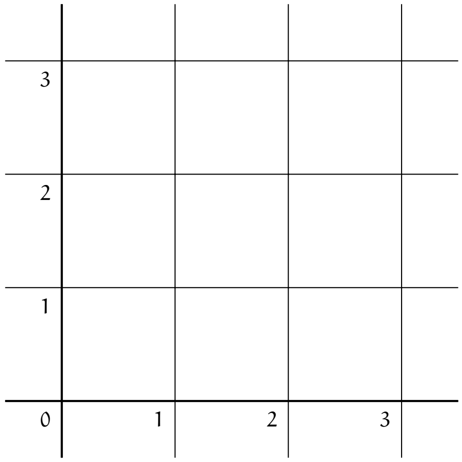
$$f(1) =$$

$$f(3) =$$

$$f(\ldots) =$$

5. Calcular el valor mínimo y el valor máximo de la función f en el intervalo $[1,3]$:

$$\min_{x \in [1,3]} f(x) = \qquad\qquad \max_{x \in [1,3]} f(x) =$$



6. Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo $[1, 3]$ tomando en cuenta las respuestas de los ejercicios anteriores. Ademés puede completar el polinomio al cuadrado, calcular los valores de f en algunos puntos adicionales, etc.

7. Usando la información anterior calcular la imagen del intervalo $[1, 3]$ bajo la función f:

$$f([1, 3]) =$$

¿Qué tan grandes son los valores de $|f'|$?

8. Calcular la segunda derivada: $\qquad f''(x) =$

9. Determinar el signo de f'' en el intervalo $[1, 3]$. Hacer conclusiones acerca de la monotonía de f' en partes del intervalo $[1, 3]$:

- f' crece en ... , porque $f'' \geq 0$ en este intervalo.
- f' decrece en ... , porque $f'' \leq 0$ en este intervalo.

10. Usando la información anterior calcular el valor mínimo y el valor máximo de f':

$$\min_{x \in [1,3]} f'(x) = \qquad\qquad \max_{x \in [1,3]} f'(x) =$$

11. Usando la respuesta del Ejercicio 10 calcular el valor máximo de $|f'|$:

$$\max_{x \in [1,3]} |f'(x)| =$$

Conclusión y primeras iteraciones

12. Hacer la conclusión si f es contractiva.

13. Calcular $x_1 = f(x_0)$ y $x_2 = f(x_1)$, donde $x_0 = 1$.