Repaso de cálculo: sucesiones, funciones continuas, funciones derivables, fórmula de Taylor

Egor Maximenko

ESFM del IPN

24 de diciembre de 2010

Contenido

Contenido

Sucesiones

Definición (sucesión)

Una aplicación se llama sucesión, si su dominio de definición es $\mathbb{N}$.

Sucesiones

Definición (sucesión)

Una aplicación se llama sucesión, si su dominio de definición es $\mathbb{N}$.

Notación

Si $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión y $n \in \mathbb{N}$, entonces el valor de la sucesión x en el punto n se denota por $x(n)$ ó x_n.
Toda la sucesión x también se denota por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sucesiones

Definición (sucesión)

Una aplicación se llama sucesión, si su dominio de definición es $\mathbb{N}$.

Notación

Si $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión y $n \in \mathbb{N}$, entonces el valor de la sucesión x en el punto n se denota por $x(n)$ ó x_n.
Toda la sucesión x también se denota por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejemplo

Definamos la sucesión $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por la formula

$$a_n := \frac{(-1)^n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Entonces $a_1 = -1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = -1/3$.

Suceciones

Ejemplo

```
a[n_] := (-1)^n / n
```

Suceciones

Ejemplo

```
a[n_] := (-1)^n / n

a[7]
```

$$-\frac{1}{7}$$

Suceciones

Ejemplo

```
a[n_] := (-1)^n / n
```

```
a[7]
```

$$-\frac{1}{7}$$

```
{a[1],a[2],a[3],a[4],a[5]}
```

$$\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right\}$$

Suceciones

Ejemplo

```
a[n_] := (-1)^n / n
```

```
a[7]
```

$$-\frac{1}{7}$$

```
{a[1],a[2],a[3],a[4],a[5]}
```

$$\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right\}$$

```
a[Range[5]]
```

$$\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right\}$$

Suceciones

Ejemplo

```
a[n_] := (-1)^n / n
```

```
a[7]
```

$$-\frac{1}{7}$$

```
{a[1],a[2],a[3],a[4],a[5]}
```

$$\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right\}$$

```
a[Range[5]]
```

$$\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right\}$$

```
Map[a, Range[5]]
```

$$\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right\}$$

Sucesiones acotadas y no acotadas

Definición (sucesión acotada)

La sucesión $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es acotada, si existe un número $M \geq 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todos $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos

¿Cuáles de las siguientes sucesiones son acotadas?

$$a_n = (-1)^n, \qquad a_n = \sqrt{n}, \qquad a_n = \sin(n+2)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Sucesiones acotadas y no acotadas

Ejemplo

Usando Mathematica, investiguemos, si es acotada la siguiente sucesión:

$$a_n = \sin(n+2)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Sucesiones acotadas y no acotadas

Ejemplo

Usando Mathematica, investiguemos, si es acotada la siguiente sucesión:

$$a_n = \sin(n+2)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

```
a[n_] := Sin[n+2] (Sqrt[n+1] - Sqrt[n])
```

Sucesiones acotadas y no acotadas

Ejemplo

Usando Mathematica, investiguemos, si es acotada la siguiente sucesión:

$$a_n = \sin(n+2)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

```
a[n_] := Sin[n+2] (Sqrt[n+1] - Sqrt[n])
```

```
a[Range[3]]
```

$$\left\{\left(-1+\sqrt{2}\right)\mathrm{Sin}[3], \left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}[4], \left(2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}[5]\right\}$$

Sucesiones acotadas y no acotadas

Ejemplo

Usando Mathematica, investiguemos, si es acotada la siguiente sucesión:

$$a_n = \sin(n+2)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

```
a[n_] := Sin[n+2] (Sqrt[n+1] - Sqrt[n])
```

```
a[Range[3]]
```

$$\left\{\left(-1+\sqrt{2}\right)\mathrm{Sin}[3], \left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}[4], \left(2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}[5]\right\}$$

```
avalues = N[Abs[a[Range[10]]]]; NumberForm[avalues, 3]
```

$$\{0.0585, 0.241, 0.257, 0.066, 0.14, 0.194, 0.0753, 0.0933, 0.162, 0.0828\}$$

Sucesiones acotadas y no acotadas

Ejemplo

Usando Mathematica, investiguemos, si es acotada la siguiente sucesión:

$$a_n = \sin(n+2)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

```
a[n_] := Sin[n+2] (Sqrt[n+1] - Sqrt[n])
```

```
a[Range[3]]
```

$$\left\{\left(-1+\sqrt{2}\right)\mathrm{Sin}[3], \left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}[4], \left(2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}[5]\right\}$$

```
avalues = N[Abs[a[Range[10]]]]; NumberForm[avalues, 3]
```

$$\{0.0585, 0.241, 0.257, 0.066, 0.14, 0.194, 0.0753, 0.0933, 0.162, 0.0828\}$$

```
Max[N[a[Abs[Range[10000]]]]]
```

0.256943

Sucesiones acotadas y no acotadas

Ejemplo

Usando Mathematica, investiguemos, si es acotada la siguiente sucesión:

$$a_n = \sin(n+2)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

```
a[n_] := Sin[n+2] (Sqrt[n+1] - Sqrt[n])
```

```
a[Range[3]]
```

$$\left\{\left(-1+\sqrt{2}\right)\mathrm{Sin}[3], \left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}[4], \left(2-\sqrt{3}\right)\mathrm{Sin}[5]\right\}$$

```
avalues = N[Abs[a[Range[10]]]]; NumberForm[avalues, 3]
```

$$\{0.0585, 0.241, 0.257, 0.066, 0.14, 0.194, 0.0753, 0.0933, 0.162, 0.0828\}$$

```
Max[N[a[Abs[Range[10000]]]]]
```

$$0.256943$$

Resumen: *parece que sí, la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.*

Sucesiones acotadas y no acotadas

Demostremos, que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada:

$$a_n = \sin(n+2)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Sucesiones acotadas y no acotadas

Demostremos, que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada:

$$a_n = \sin(n+2)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Demostración.

$$|a_n| = |\sin(n+2)| \cdot \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right|$$

□

Sucesiones acotadas y no acotadas

Demostremos, que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada:

$$a_n = \sin(n+2)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} |a_n| &= |\sin(n+2)| \cdot \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| \\ &\le \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \end{aligned}$$

□

Sucesiones acotadas y no acotadas

Demostremos, que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada:

$$a_n = \sin(n+2)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
|a_n| &= |\sin(n+2)| \cdot \left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right| \\
&\le \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

□

Sucesiones acotadas y no acotadas

Demostremos, que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada:

$$a_n = \sin(n+2)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
|a_n| &= |\sin(n+2)| \cdot \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| \\
&\le \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}
\end{aligned}$$

□

Sucesiones acotadas y no acotadas

Demostremos, que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada:

$$a_n = \sin(n+2)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
|a_n| &= |\sin(n+2)| \cdot \left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| \\
&\le \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \le \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

Límite de una sucesión

Definición (límite finito de una sucesión)

Sea $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y b un número real.
La sucesión $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite b (se escribe $a_n \to b$ ó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$) si para $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad$ tal que $\quad \forall n > N \quad |a_n - b| < \varepsilon$.

Límite de una sucesión

Definición (límite finito de una sucesión)

Sea $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y b un número real.
La sucesión $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite b (se escribe $a_n \to b$ ó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$) si para $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad$ tal que $\quad \forall n > N \quad |a_n - b| < \varepsilon$.

Teorema

Si una sucesión tiene un límite finito, entonces esta sucesión es acotada.

Límite de una sucesión

Definición (límite finito de una sucesión)

Sea $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y b un número real.
La sucesión $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite b (se escribe $a_n \to b$ ó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$) si para $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad$ tal que $\quad \forall n > N \quad |a_n - b| < \varepsilon$.

Teorema

Si una sucesión tiene un límite finito, entonces esta sucesión es acotada.

Ejemplo

Dar ejemplo de una sucesión que es acotada pero no tiene límite:

Límite de una sucesión

Definición (límite finito de una sucesión)

Sea $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y b un número real.
La sucesión $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite b (se escribe $a_n \to b$ ó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$) si para $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad$ tal que $\quad \forall n > N \quad |a_n - b| < \varepsilon$.

Teorema

Si una sucesión tiene un límite finito, entonces esta sucesión es acotada.

Ejemplo

Dar ejemplo de una sucesión que es acotada pero no tiene límite:

$$a_n = (-1)^n.$$

Otro ejemplo:

Límite de una sucesión

Definición (límite finito de una sucesión)

Sea $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y b un número real.
La sucesión $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite b (se escribe $a_n \to b$ ó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$) si para $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad$ tal que $\quad \forall n > N \quad |a_n - b| < \varepsilon$.

Teorema

Si una sucesión tiene un límite finito, entonces esta sucesión es acotada.

Ejemplo

Dar ejemplo de una sucesión que es acotada pero no tiene límite:

$$a_n = (-1)^n.$$

Otro ejemplo:

$$a_n = \cos(n).$$

Contenido

Continuidad de una función

Definición

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $f \colon X \to \mathbb{R}$.
La función f es continua en el punto x_0, si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Continuidad de una función

Definición

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $f\colon X \to \mathbb{R}$.
La función f es continua en el punto x_0, si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definición

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ y $f\colon X \to \mathbb{R}$. Dicen que f es continua en X si f es continua en todo punto $x_0 \in X$.

Continuidad de una función

Definición

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$.
La función f es continua en el punto x_0, si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0 \qquad \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Definición

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ y $f : X \to \mathbb{R}$. Dicen que f es continua en X si f es continua en todo punto $x_0 \in X$.

El conjunto de todas funciones continuas en X se denota por $C(X)$.
Cuando X es un intervalo, se omiten los paréntesis: $C[a, b]$.

Caracterización de la continuidad en términos de sucesiones

Teorema

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- f *es continua en el punto* x_0;
- *para toda sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, *si* $x_n \to x_0$, *entonces* $f(x_n) \to f(x_0)$.

Caracterización de la continuidad en términos de sucesiones

Teorema

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $f\colon X \to \mathbb{R}$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- *f es continua en el punto x_0;*
- *para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, si $x_n \to x_0$, entonces $f(x_n) \to f(x_0)$.*

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

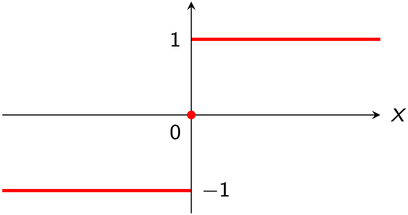
Caracterización de la continuidad en términos de sucesiones

Teorema

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- f *es continua en el punto* x_0*;*
- *para toda sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$*, si* $x_n \to x_0$*, entonces* $f(x_n) \to f(x_0)$.

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$



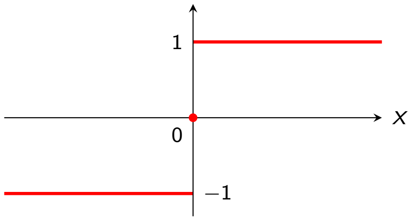
Caracterización de la continuidad en términos de sucesiones

Teorema

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- *f es continua en el punto x_0;*
- *para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, si $x_n \to x_0$, entonces $f(x_n) \to f(x_0)$.*

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$



La función sgn no es continua en el punto 0:

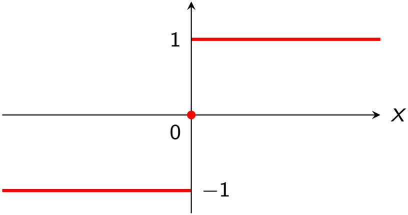
Caracterización de la continuidad en términos de sucesiones

Teorema

Sean $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$.
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- f *es continua en el punto* x_0;
- *para toda sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, *si* $x_n \to x_0$, *entonces* $f(x_n) \to f(x_0)$.

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$



La función sgn no es continua en el punto 0:
$1/n \to 0$, pero $\operatorname{sgn}(1/n) \not\to \operatorname{sgn}(0)$.

Teorema de los valores extremos para funciones continuas

Teorema

Si $f \in C[a,b]$, *entonces existen* $c_1, c_2 \in [a,b]$ *tales que*

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2) \qquad \forall x \in [a,b].$$

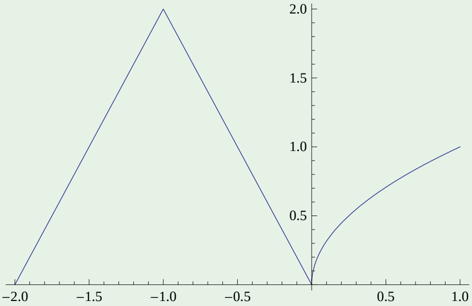
Teorema de los valores extremos para funciones continuas

Teorema

Si $f \in C[a,b]$, *entonces existen* $c_1, c_2 \in [a,b]$ *tales que*

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Ejemplo



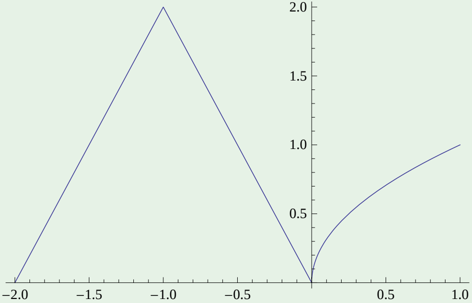
Teorema de los valores extremos para funciones continuas

Teorema

Si $f \in C[a,b]$, entonces existen $c_1, c_2 \in [a,b]$ tales que

$$f(c_1) \le f(x) \le f(c_2) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Ejemplo



En este ejemplo
$c_1 = -2$, $f(c_1) = 0$,
$c_2 = -1$, $f(c_2) = 2$.

Teorema de valor intermedio

Teorema

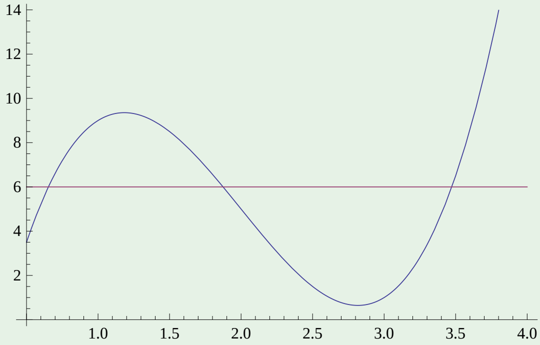
Sean $f \in C[a,b]$ *y* $K \in (f(a), f(b))$.
Entonces existe $c \in (a,b)$ *tal que* $f(c) = K$.

Teorema de valor intermedio

Teorema

Sean $f \in C[a,b]$ y $K \in (f(a), f(b))$.
Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = K$.

Ejemplo



Teorema de valor intermedio: ejemplo

Ejemplo

Mostrar que la ecuación $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0.2, 0.3]$.

Teorema de valor intermedio: ejemplo

Ejemplo

Mostrar que la ecuación $x\cos x - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0.2, 0.3]$.

Solución.

Se sabe que $|\cos x| \le 1$, $|\sin x| \le 1$ y $|\sin x| \le |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De allí

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} \ge 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Usando estas desigualdades, podemos estimar los valores de nuestra función $f(x) := x\cos x - 2x^2 + 3x - 1$ en los extremos del intervalo:

$$f(0.3) = 0.3\cdot\cos 0.3 - 0.18 + 0.9 - 1 \ge 0.3(1 - 0.045) - 0.28 > 0;$$
$$f(0.2) = 0.2\cdot\cos 0.2 - 0.08 + 0.6 - 1 \le 0.2 - 0.48 < 0. \qquad \square$$

Teorema de valor intermedio: ejemplo

Ejemplo

Determine un intervalo que contenga una solución de la ecuación

$$x - 3^{-x} = 0.$$

Teorema de valor intermedio: ejemplo

Ejemplo

Determine un intervalo que contenga una solución de la ecuación

$$x - 3^{-x} = 0.$$

Solución.

Sea $f(x) := x - 3^{-x}$. Recordemos dos hechos:

- $3^t \to 0$ cuando $t \to -\infty$;
- $\frac{3^t}{t} \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$.

De allí $f(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$, y $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) > 0$.
$f(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$, por eso $\exists b \in \mathbb{R}$ tal que $f(b) < 0$.
Es fácil hallar valores concretos de a y b:

$$f(0) = -3 < 0; \qquad f(1) = 1 - \frac{1}{3} > 0.$$

□

Teorema de valor intermedio: tareas

Demuestre que las siguientes ecuaciones tienen al menos una solución en los intervalos dados:

- $(x-2)^2 - \ln x = 0, \qquad [1,2];$
- $(x-2)^2 - \ln x = 0, \qquad [e,4];$
- $2x\cos(2x) - (x-2)^2 = 0, \qquad [2,3];$
- $2x\cos(2x) - (x-2)^2 = 0, \qquad [3,4];$
- $x - (\ln x)^x = 0, \qquad [4,5].$

Determine intervalos que contengas soluciones a las siguientes ecuaciones:

- $4x^2 - e^x = 0;$
- $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0.$

Contenido

Definición de derivada

Definición

Sea f una función definida en un intervalo que contiene a x_0.
La función f es derivable en x_0 si existe y es finito el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

El valor de este límite se denota por $f'(x_0)$ y se llama derivada de f en x_0.

Definición de derivada

Definición

Sea f una función definida en un intervalo que contiene a x_0.
La función f es derivable en x_0 si existe y es finito el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

El valor de este límite se denota por $f'(x_0)$ y se llama derivada de f en x_0.

Definición

La función f es derivable en el conjunto X
si es derivable en cada punto de X.

Relación entre funciones derivables y continuas

Teorema

Sean X un intervalo en $\mathbb{R}$ y f una función derivable en X. Entonces f es continua en X.

Relación entre funciones derivables y continuas

Teorema

Sean X un intervalo en $\mathbb{R}$ y f una función derivable en X. Entonces f es continua en X.

Ejemplo de una función continua y no derivable:

Relación entre funciones derivables y continuas

Teorema

Sean X un intervalo en $\mathbb{R}$ y f una función derivable en X.
Entonces f es continua en X.

Ejemplo de una función continua y no derivable:

Ejemplo

La función $f(x) = |x|$ es continua en $\mathbb{R}$,
pero no tiene derivada en el punto 0.

Extremos de una función derivable

Teorema (teorema del valor extremo)

Sea f una función definida en (a, b)
y sea $c \in (a, b)$ un punto de extremo local de f.
Supongamos que f es derivable en x_0. Entonces $f'(x_0) = 0$.

Extremos de una función derivable

Teorema (teorema del valor extremo)

Sea f una función definida en (a, b)
y sea $c \in (a, b)$ un punto de extremo local de f.
Supongamos que f es derivable en x_0. Entonces $f'(x_0) = 0$.

Corolario

Suponga que $f \in C[a, b]$ y que f es derivable en (a, b).
Entonces f los valores máximo y mínimo de f en $[a, b]$
aparecen en los extremos de $[a, b]$, o bien donde se se anula f'.

Extremos de una función derivable: ejemplo

Ejemplo

Determine $\max\limits_{2 \le x \le 4} |f(x)|$ para $f(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2$.

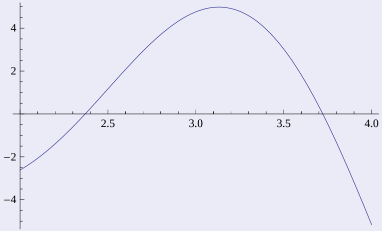
Extremos de una función derivable: ejemplo

Ejemplo

Determine $\max\limits_{2\le x\le 4} |f(x)|$ para $f(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2$.

Solución (inicio)

```
f[x_] := 2 x Cos[2 x] - (x - 2)^2;  Plot[f[x], x, 2, 4]
```



Vemos que existe sólo un punto $c \in (2,4)$ donde $f'(c) = 0$, y el máximo de f se alcanza en c.

Extremos de una función derivable: ejemplo

Ejemplo

Determine $\max\limits_{2\le x\le 4} |f(x)|$ para $f(x) = 2x\cos(2x) - (x-2)^2$.

Solución (final).

...

Ya sabemos que existe sólo un punto $c \in (2,4)$ donde $f'(c) = 0$.
Calculemos la derivada de f y la raíz de la derivada:

`Df[x_] := D[f[x], x]` $\quad -2(-2+x) + 2\mathrm{Cos}[2x] - 4x\mathrm{Sin}[2x]$

`Dfroots = FindRoot[Df[x] == 0, {x, 3}]` $\quad \{x \to 3.13111\}$

`c = ReplaceAll[x, Dfroots]` $\quad 3.13111$

`{f[c], N[f[4]]}` $\quad \{4.98143, -5.164\}$

Respuesta: $\max\limits_{2\le x\le 4} |f(x)| = |f(4)| \approx 5.164$. □

Extremos de una función derivable: tareas

Determine $\max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$ para las siguientes funciones e intervalos:

- $f(x) = (2 - e^x + 2x)/3, \quad [0, 1];$
- $f(x) = (4x - 3)/(x^2 - 2x), \quad [0.5, 1];$
- $f(x) = 1 + e^{-\cos(x-1)}, \quad [1, 2].$

Teoremas de Rolle y Lagrange

Teorema (Rolle)

Suponga que $f \in C[a,b]$ *y que* f *es derivable en* (a,b).
Si $f(a) = f(b)$, *entonces* $\exists c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Teoremas de Rolle y Lagrange

Teorema (Rolle)

Suponga que $f \in C[a,b]$ *y que* f *es derivable en* (a,b).
Si $f(a) = f(b)$, *entonces* $\exists c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Teorema (Lagrange, teorema de valor medio)

Suponga que $f \in C[a,b]$ *y* f *es derivable en* (a,b).
Entonces $\exists c \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema de Rolle: ejemplo

Ejemplo

Demuestre que $f'(x)$ se anula al menos una vez en el intervalo $[-1, 3]$:

$$f(x) = (x-2)\sin x \ln(x+2).$$

Teorema de Rolle: ejemplo

Ejemplo

Demuestre que $f'(x)$ se anula al menos una vez en el intervalo $[-1, 3]$:

$$f(x) = (x - 2) \sin x \ln(x + 2).$$

Solución.

Es fácil encontrar dos puntos en $[-1, 3]$ donde f se anula:

$$f(-1) = -3 \cdot \sin(-1) \cdot 0 = 0;$$
$$f(2) = 0 \cdot \sin 2 \cdot \ln 4 = 0.$$

Por el teorema de Rolle, $\exists c \in (-1, 2) \subset [-1, 3]$ tal que $f'(c) = 0$. $\square$

Teorema de Rolle: tareas

Demuestre que $f'(x)$ se anula al menos una vez en los intervalos dados:

- $f(x) = 1 - e^x + (e-1)\sin\dfrac{\pi x}{2}, \qquad [0,1];$
- $f(x) = (x-1)\tan x + x\sin\pi x, \qquad [0,1];$
- $f(x) = x\sin\pi x - (x-2)\ln x, \qquad [1,2].$

Teorema generalizado de Rolle

Teorema

Sea f una función n veces derivable en (a, b).
Supongamos que f se anula en los $n + 1$ números distintos.
Entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f^{(n)}(c) = 0$.

Clases C^k

Definición (clase C^1)

La función f pertenece a la clase $C^1[a, b]$,
si f es derivable en $[a, b]$ y $f' \in C[a, b]$.

Clases C^k

Definición (clase C^1)

La función f pertenece a la clase $C^1[a,b]$,
si f es derivable en $[a,b]$ y $f' \in C[a,b]$.

Definición (clase C^k)

La función f pertenece a la clase $C^k[a,b]$,
si f es derivable en $[a,b]$ y $f' \in C^{k-1}[a,b]$.

Clases C^k

Definición (clase C^1)

La función f pertenece a la clase $C^1[a,b]$,
si f es derivable en $[a,b]$ y $f' \in C[a,b]$.

Definición (clase C^k)

La función f pertenece a la clase $C^k[a,b]$,
si f es derivable en $[a,b]$ y $f' \in C^{k-1}[a,b]$.

Observación

$f \in C^k[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad f$ es k veces derivable en $[a,b]$ y $f^{(k)} \in C[a,b]$.

Condición de Lipschitz

Definición

La función f satisface una condición de Lipschitz en el intervalo $[a, b]$, si existe un número $L > 0$ (coeficiente de Lipschitz o constante de Lipschitz) tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

Condición de Lipschitz

Definición

La función f satisface una condición de Lipschitz en el intervalo $[a, b]$, si existe un número $L > 0$ (coeficiente de Lipschitz o constante de Lipschitz) tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

Tarea

Mostrar que si f satisface una condición de Lipschitz en un intervalo $[a, b]$, entonces $f \in C[a, b]$.

Condición de Lipschitz

Definición

La función f satisface una condición de Lipschitz en el intervalo $[a, b]$, si existe un número $L > 0$ (coeficiente de Lipschitz o constante de Lipschitz) tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

Tarea

Mostrar que si f satisface una condición de Lipschitz en un intervalo $[a, b]$, entonces $f \in C[a, b]$.

Tarea

Mostrar que si $f \in C^1[a, b]$, entonces f satisface una condición de Lipschitz.

Contenido

Teorema de Taylor

Definición (n-ésimo polinomio de Taylor)

Suponga que $f \in C^n[a, b]$ y $x_0 \in [a, b]$.
El n-ésimo polinomio de Taylor para f en torno a x_0 es

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Teorema de Taylor

Definición (n-ésimo polinomio de Taylor)

Suponga que $f \in C^n[a,b]$ y $x_0 \in [a,b]$.
El n-ésimo polinomio de Taylor para f en torno a x_0 es

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Ejemplo

```
Series[Sin[x], {x, 0, 3}]
```

$x - \frac{x^3}{6} + O[x]^4$

```
P3[x_] := Normal[%]; P3[x]
```

$x - \frac{x^3}{6}$

```
Series[Sin[x], {x, 0, 4}]
```

$x - \frac{x^3}{6} + O[x]^5$

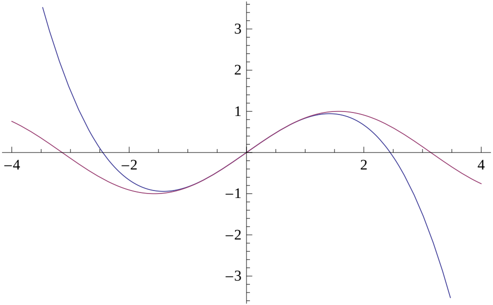
Polinomios de Taylor

```
P3expr = Normal[Series[Sin[x], {x, 0, 3}]]
```

$$x - \frac{x^3}{6}$$

`P3 := Function[x, Evaluate[P3expr]]` (*convertir a una función*)

```
Plot[{P3[x], Sin[x]}, {x, -4, 4}]
```



Fórmula de Taylor

Teorema (de Taylor)

Suponga que $f \in C^n[a,b]$, *que* $f^{(n+1)}$ *existe en* $[a,b]$ *y* $x_0 \in [a,b]$. *Para cada* $x \in [a,b]$, *existe un número* $\xi(x)$ *entre* x_0 *y* x *tal que*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde el error de truncamiento $R_n(x)$ *se puede escribir como*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Aproximación por los polinomios de Taylor

Ejemplo

Determine el tercer y el cuarto polinomio de Taylor para $f(x) = \sin x$ en torno a $x_0 = 0$, y use estos polinomios para aproximar $\sin(0.1)$.

Aproximación por los polinomios de Taylor

Ejemplo

Determine el tercer y el cuarto polinomio de Taylor para $f(x) = \sin x$ en torno a $x_0 = 0$, y use estos polinomios para aproximar $\sin(0.1)$.

Solución para $n = 3$

$n = 3$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4 \sin \xi(x)}{24};$$

$$\sin(0.1) = 0.1 - \frac{0.001}{6} \pm \frac{0.0001}{24} = 0.0998333 \pm 0.0000042;$$

$$\mathrm{ER} \leq 4.2 \cdot 10^{-5}.$$

Aproximación por los polinomios de Taylor

Continuación del ejemplo, solución para $n = 4$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5 \cos\xi(x)}{120};$$

$$\sin(0.1) = 0.1 - \frac{0.001}{6} \pm \frac{0.00001}{120} = 0.099833333 \pm 0.000000083;$$

$$\mathrm{ER} \leq 8.3 \cdot 10^{-7}.$$

Aproximación por los polinomios de Taylor

Continuación del ejemplo, solución para $n = 4$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5 \cos \xi(x)}{120};$$

$$\sin(0.1) = 0.1 - \frac{0.001}{6} \pm \frac{0.00001}{120} = 0.099833333 \pm 0.000000083;$$

$$\mathrm{ER} \leq 8.3 \cdot 10^{-7}.$$

Resumen

Para $n = 3$, $\mathrm{ER} \leq 4.2 \cdot 10^{-5}$; para $n = 4$, $\mathrm{ER} \leq 8.3 \cdot 10^{-7}$.

Aunque el polinomio de Taylor es el mismo para $n = 3$ y $n = 4$,
para $n = 4$ recibimos una cota más exacta para el error de truncamiento.

Un poco de moraleja: aproximación y precisión

El análisis numérico tiene dos objetivos:

i) encontrar una aproximación;

ii) determinar la precisión de la aproximación.

En el ejemplo anterior, las fórmulas de Taylor para $n = 3$ y $n = 4$ dan la misma aproximación, pero la fórmula para $n = 4$ es más informativa, porque da una cota más exacta del error de truncamiento.

Aproximación por los polinomios de Taylor: tarea

- Para $f(x) = x^3$ y $x_0 = 0$,
  determine el segundo polinomio de Taylor $P_2(x)$ en torno a x_0;
  halle una cota para el error de truncamiento $R_2(0.5)$,
  calcule el error real como $f(0.5) - P_2(0.5)$.
- Repita el ejercicio anterior para $f(x) = x^3$ y $x_0 = 1$;
  calcule una cota para el error y el error real en $x = 1.5$.
- Obtenga el tercer polinomio de Taylor $P_3(x)$
  para $f(x) = \sqrt{1+x}$ en torno a x_0;
  aproxime $\sqrt{0.75}$ y $\sqrt{1.25}$ usando $P_3(x)$
  y calcule los errores reales.