Representación de números en los sistemas binario y hexadecimal

Agradezco a Linda Estrella López Rodríguez por encontrar y corregir varios errores matemáticos que yo había cometido en los ejemplos de este tema.

1. Sistemas posicionales. Cuando un número se escribe en un sistema posicional, el "peso" de cada dígito depende de su posición. Por ejemplo, en el sistema decimal

$$371.28 = 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 + 2 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}.$$

En el sistema binario los pesos de los dígitos son potencias de 2.

Conversión de binario a decimal

2. Ejemplo.

$$\begin{aligned} 1011_2 &= 8 + 2 + 1 = 11; \\ 111010001_2 &= 256 + 128 + 64 + 16 + 1 = 465; \\ 101.1101_2 &= 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 5\frac{13}{16} = 5.8125. \end{aligned}$$

3. Conversión de binario a decimal en el caso de números grandes. Se usa la misma idea que en la división sintética. Por ejemplo, transformemos en binario el número

$$1110100011.01011_2.$$

Primero consideramos la parte entera:

	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1
2	1	3	7	14	29	58	116	232	465	931

Luego la parte fraccionaria 0.01011_2 (los dígitos se escriben en el orden inverso):

	1	1	0	1	0	0
0.5	1	1.5	0.75	1.375	0.6875	0.34375

Respuesta: 931.34375.

4. Ejercicio: binario a decimal. 1101_2, 11100111_2, 110.101_2.

Fracciones binarias periódicas

5. Ejemplo. Escribir como una fracción el número binario $x = 10.1(110)_2$.

Solución. Esta notación significa que los dígitos 101 forman un período:

$$x = \big(10.1110110110\ldots\big)_2.$$

Notemos que

$$x = 2 + \frac{1}{2} + \frac{6}{2^4} + \frac{6}{2^7} + \frac{6}{2^{10}} + \ldots.$$

Hagamos algunas transformaciones y apliquemos la fórmula de la suma de una serie geométrica:

$$\begin{aligned} x &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \ldots\right) \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{7} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{7} = 2\frac{13}{14}. \end{aligned}$$

□

Conversión del sistema decimal al binario

6. Ejemplo. Convertir el número 41.1875 en binario.

Solución. Para convertir en binario la parte entera, la dividimos sucesivamente entre 2 y apuntamos los restos. Para convertir la parte fraccionaria, la multiplicamos sucesivamente por 2 y sacamos las partes enteras.

$$\begin{array}{r|l} 41 & 1 \\ 20 & 0 \\ 10 & 0 \\ 5 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} & .1875 \\ 0 & .375 \\ 0 & .75 \\ 1 & .5 \\ 1 & .0 \end{array}$$

De allí $41 = 101001_2$, $0.1875 = 0.0011_2$ y $41.1875 = 101001.0011_2$. □

Conversión de un número racional en una fracción binaria periódica

7. Ejemplo. Convertir el número $\dfrac{3}{28}$ en una fracción binaria periódica.

Solución.

$$\begin{array}{r|l}
 & 3/28 \\
0 & 3/14 \\
0 & 3/7 \\
\hline
0 & 6/7 \\
1 & 5/7 \\
1 & 3/7 \\
\hline
0 & 6/7 \\
\ldots & \ldots
\end{array}$$

Respuesta:

$$\frac{3}{28} = 0.00(011)_2.$$

Para comprobación, vamos a convertir la fracción binaria periódica obtenida en un número racional.

$$\begin{aligned}
0.00(011)_2 &= 0.00\,\underbrace{011}\,\underbrace{011}\,\underbrace{011}\ldots_2 \\
&= \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}\right) + \left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8}\right) + \left(\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{11}}\right) + \ldots \\
&= \frac{3}{2^5} + \frac{3}{2^8} + \frac{3}{2^{11}} + \ldots \\
&= \frac{3}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \ldots\right) \\
&= \frac{3}{2^5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{3}{2^5} \cdot \frac{2^3}{7} = \frac{3}{28}.
\end{aligned}$$

□

8. Ejercicio. Convierta el número $\dfrac{7}{5}$ en una fracción binaria periódica y haga la comprobación.

9. Ejemplo. Convertir el número 0.3 en binario.

Solución.

$$
\begin{array}{r|l}
 & .3 \\
0 & .6 \\
\hline
1 & .2 \\
0 & .4 \\
0 & .8 \\
1 & .6 \\
\hline
1 & .2 \\
0 & .4 \\
0 & .8 \\
1 & .6 \\
\hline
1 & .2 \\
\ldots & \ldots
\end{array}
$$

Ya es obvio que los dígitos binarios 1001 forman un período. Respuesta:

$$0.3 = 0.0(1001)_2 = 0.0100110011001\ldots \qquad \square$$

10. Ejercicios: decimal a binario. 7, 30, 72, 3.75, 5.6.

Sistema hexadecimal

11. El sistema posicional con base 16 se llama *sistema hexadecimal*. En este sistema los dígitos son entre 0 y 15. Los dígitos con valores $10, 11, 12, 13, 14, 15$ se denotan por $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$.

12. Ejemplo: binario a hexadecimal. Es fácil ver que cada cuatro dígitos en el sistema binario corresponden a un dígito en el sistema hexadecimal:

$$\begin{aligned}
1011110.011_2 &= \underbrace{0101}\,\underbrace{1110}\,.\,\underbrace{0110}{}_2 \\
&= (0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 16^1 + (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 16^0 \\
&\quad + (0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 16^{-1} \\
&= 5\mathrm{E}.6_{16}.
\end{aligned}$$

13. Ejemplo: binario a hexadecimal.

$$1010110011.10111_2 = \underbrace{0010}\,\underbrace{1011}\,\underbrace{0011}\,.\,\underbrace{1011}\,\underbrace{1000}{}_2 = 2\mathrm{B}3.\mathrm{B}8_{16}.$$

14. Ejemplo: hexadecimal a binario. Convertamos un número hexadecimal a un binario:

$$3\mathrm{E}.9\mathrm{F}_{16} = \underbrace{0011}\,\underbrace{1110}\,.\,\underbrace{1001}\,\underbrace{1111}{}_2 = 111110.10011111_2.$$

15. Ejercicio: conversión de decimal a binario y viceversa en un sistema de álgebra computacional. En Wolfram Mathematica u otra sistema de álgebra computacional busque funciones que conviertan números de una base a otra. Compruebe los resultados de los primeros ejercicios.