Polinomios básicos de Lagrange

Egor Maximenko
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional, ESFM, México

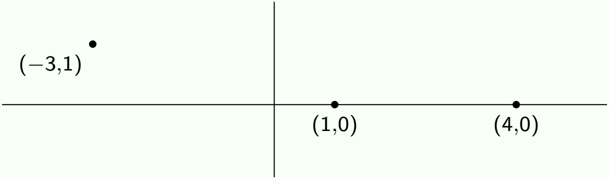
2 de enero de 2015

Ejemplo. Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(-3) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(4) = 0.$$

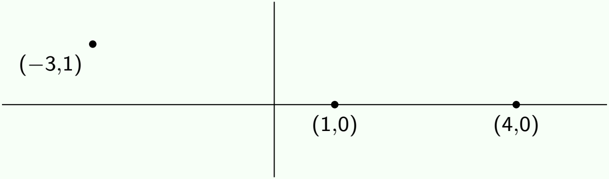
Ejemplo. Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(-3) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(4) = 0.$$



Ejemplo. Construir un polinomio P de grado 2 tal que

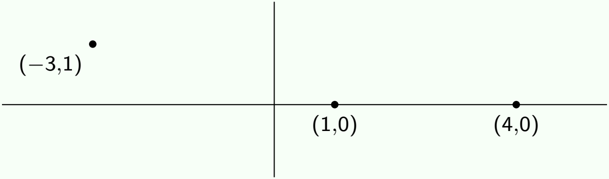
$$P(-3) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(4) = 0.$$



Solución. Buscamos P en la forma $P(x) =$

Ejemplo. Construir un polinomio P de grado 2 tal que

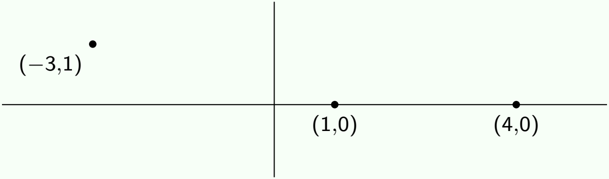
$$P(-3) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(4) = 0.$$



Solución. Buscamos P en la forma $\quad P(x) = \qquad (x-1)$

Ejemplo. Construir un polinomio P de grado 2 tal que

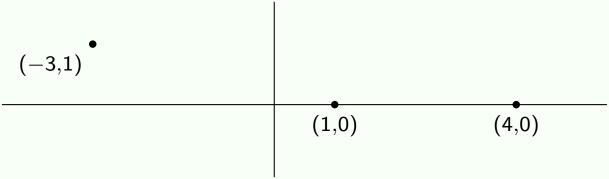
$$P(-3) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(4) = 0.$$



Solución. Buscamos P en la forma $\quad P(x) = \qquad (x-1)\,(x-4)$

Ejemplo. Construir un polinomio P de grado 2 tal que

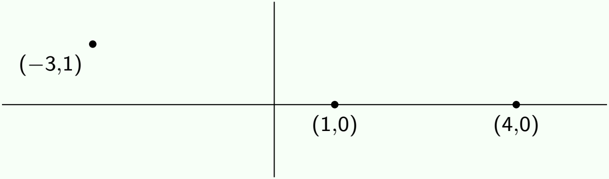
$$P(-3) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(4) = 0.$$



Solución. Buscamos P en la forma $\quad P(x) = q(x)\,(x-1)\,(x-4).$

Ejemplo. Construir un polinomio P de grado 2 tal que

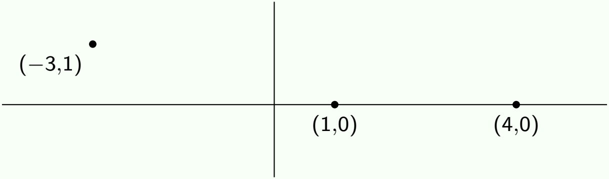
$$P(-3) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(4) = 0.$$



Solución. Buscamos P en la forma $\quad P(x) = \; c\,(x-1)\,(x-4).$

Ejemplo. Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(-3) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(4) = 0.$$

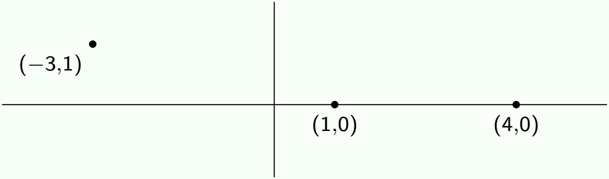


Solución. Buscamos P en la forma $P(x) = c\,(x-1)\,(x-4)$.

$x = -3$:

Ejemplo. Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(-3) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(4) = 0.$$

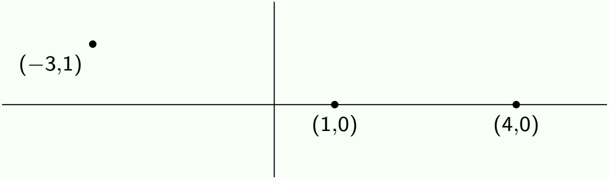


Solución. Buscamos P en la forma $P(x) = c\,(x-1)\,(x-4)$.

$$x = -3: \qquad 1 = c(-3-1)(-3-4),$$

Ejemplo. Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(-3) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(4) = 0.$$

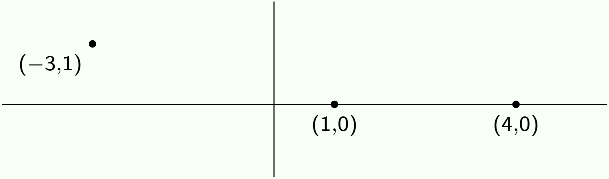


Solución. Buscamos P en la forma $P(x) = c\,(x-1)\,(x-4)$.

$$x = -3: \qquad 1 = c(-3-1)(-3-4), \qquad c = \frac{1}{(-3-1)(-3-4)}.$$

Ejemplo. Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(-3) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(4) = 0.$$



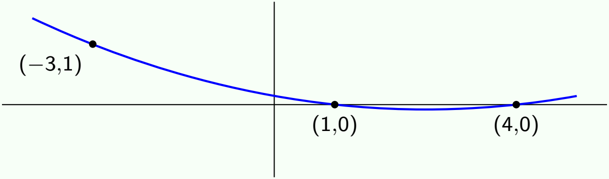
Solución. Buscamos P en la forma $\quad P(x) = \; c\,(x-1)\,(x-4).$

$$x = -3: \qquad 1 = c(-3-1)(-3-4), \qquad c = \frac{1}{(-3-1)(-3-4)}.$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)}.$$

Ejemplo. Construir un polinomio P de grado 2 tal que

$$P(-3) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P(4) = 0.$$



Solución. Buscamos P en la forma $P(x) = c\,(x-1)\,(x-4)$.

$$x = -3\colon \qquad 1 = c(-3-1)(-3-4), \qquad c = \frac{1}{(-3-1)(-3-4)}.$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)}.$$

Respuesta: $P(x) = \dfrac{4-5x+x^2}{28} = \dfrac{1}{7} - \dfrac{5}{28}\,x + \dfrac{1}{28}\,x^2.$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4-5x+x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4-5x+x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{c|ccc} & 4 & -5 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4-5x+x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & -5 & 1 \\ \hline -3 & & & \end{array}$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4-5x+x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & -5 & 1 \\ \hline -3 & & & 1 \end{array}$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4-5x+x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{c|ccc} & 4 & -5 & 1 \\ \hline -3 & & -8 & 1 \end{array}$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4 - 5x + x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & -5 & 1 \\ \hline -3 & \color{red}{28} & -8 & 1 \end{array}$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4-5x+x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & -5 & 1 \\ \hline -3 & \color{red}{28} & -8 & 1 \end{array} \qquad P(-3) = 1 \quad \color{green}{\checkmark}$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4-5x+x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & -5 & 1 \\ \hline -3 & 28 & -8 & 1 \\ 1 & & & \end{array} \qquad P(-3) = 1 \quad \checkmark$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4 - 5x + x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & -5 & 1 \\ \hline -3 & 28 & -8 & 1 \\ 1 & & & 1 \end{array} \qquad P(-3) = 1 \quad \checkmark$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4-5x+x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & -5 & 1 \\ \hline -3 & 28 & -8 & 1 \\ 1 & & -4 & 1 \end{array} \qquad P(-3) = 1 \quad \checkmark$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4-5x+x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & -5 & 1 \\ \hline -3 & 28 & -8 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \end{array} \qquad P(-3) = 1 \quad \checkmark$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4-5x+x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 4 & -5 & 1 \\
\hline
-3 & 28 & -8 & 1 \\
1 & 0 & -4 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
P(-3) = 1 \quad \checkmark \\
P(1) = 0 \quad \checkmark
\end{array}$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4-5x+x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 4 & -5 & 1 \\
\hline
-3 & 28 & -8 & 1 \\
1 & 0 & -4 & 1 \\
4 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\
P(-3) = 1 \quad \checkmark \\
P(1) = 0 \quad \checkmark \\
\\
\end{array}$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4-5x+x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 4 & -5 & 1 \\
\hline
-3 & \color{red}{28} & -8 & 1 \\
1 & \color{red}{0} & -4 & 1 \\
4 & & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\
P(-3) = 1 \quad \checkmark \\
P(1) = 0 \quad \checkmark \\
\\
\end{array}$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4 - 5x + x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 4 & -5 & 1 \\
\hline
-3 & {\color{red}28} & -8 & 1 \\
1 & {\color{red}0} & -4 & 1 \\
4 & & -1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
P(-3) = 1 \quad \checkmark \\
P(1) = 0 \quad \checkmark \\
\\
\end{array}$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4-5x+x^2}{28}.$$

Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 4 & -5 & 1 \\
\hline
-3 & \color{red}{28} & -8 & 1 \\
1 & \color{red}{0} & -4 & 1 \\
4 & \color{red}{0} & -1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\
P(-3) = 1 \quad \checkmark \\
P(1) = 0 \quad \checkmark \\
\\
\end{array}$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)} = \frac{4-5x+x^2}{28}.$$

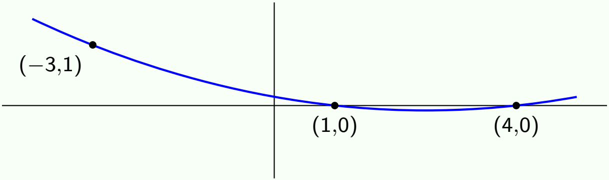
Comprobación. Verifiquemos que

$$P(-3) = 1, \qquad P(1) = 0, \qquad P(4) = 0.$$

Usamos el algoritmo de división sintética (Horner–Ruffini):

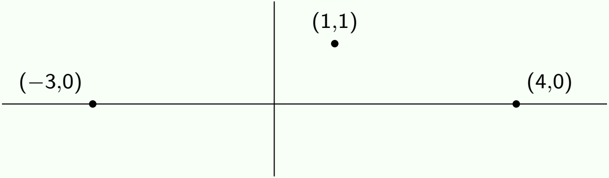
$$\begin{array}{r|rrr}
 & 4 & -5 & 1 \\
\hline
-3 & 28 & -8 & 1 \\
1 & 0 & -4 & 1 \\
4 & 0 & -1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\\
P(-3) = 1 \quad \checkmark \\
P(1) = 0 \quad \checkmark \\
P(4) = 0 \quad \checkmark
\end{array}$$

Tres polinomios básicos de Lagrange asociados a los puntos -3, 1, 4



$$L_1(-3) = 1, \quad L_1(1) = 0, \quad L_1(4) = 0, \qquad\qquad L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)}.$$

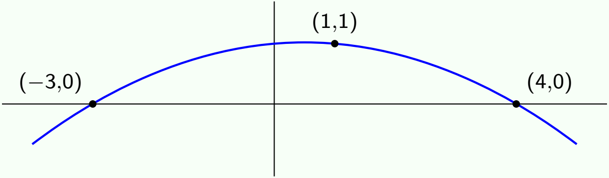
Tres polinomios básicos de Lagrange asociados a los puntos -3, 1, 4



$L_1(-3) = 1, \quad L_1(1) = 0, \quad L_1(4) = 0, \qquad L_1(x) = \dfrac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)}.$

$L_2(-3) = 0, \quad L_2(1) = 1, \quad L_2(4) = 0,$

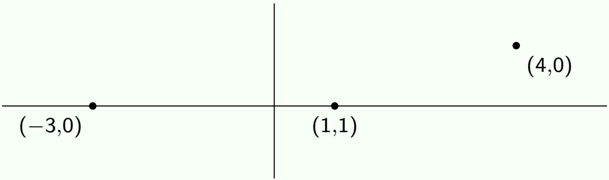
Tres polinomios básicos de Lagrange asociados a los puntos -3, 1, 4



$$L_1(-3) = 1, \quad L_1(1) = 0, \quad L_1(4) = 0, \qquad L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)}.$$

$$L_2(-3) = 0, \quad L_2(1) = 1, \quad L_2(4) = 0, \qquad L_2(x) = \frac{(x+3)(x-4)}{(1+3)(1-4)}.$$

Tres polinomios básicos de Lagrange asociados a los puntos -3, 1, 4

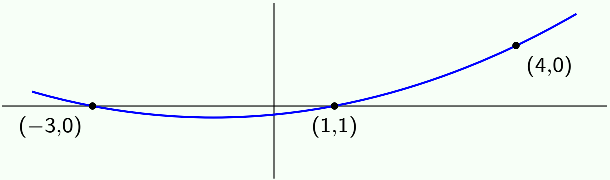


$$L_1(-3) = 1, \quad L_1(1) = 0, \quad L_1(4) = 0, \qquad L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)}.$$

$$L_2(-3) = 0, \quad L_2(1) = 1, \quad L_2(4) = 0, \qquad L_2(x) = \frac{(x+3)(x-4)}{(1+3)(1-4)}.$$

$$L_3(-3) = 0, \quad L_3(1) = 0, \quad L_3(4) = 1,$$

Tres polinomios básicos de Lagrange asociados a los puntos -3, 1, 4



$$L_1(-3) = 1, \quad L_1(1) = 0, \quad L_1(4) = 0, \qquad L_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(-3-1)(-3-4)}.$$

$$L_2(-3) = 0, \quad L_2(1) = 1, \quad L_2(4) = 0, \qquad L_2(x) = \frac{(x+3)(x-4)}{(1+3)(1-4)}.$$

$$L_3(-3) = 0, \quad L_3(1) = 0, \quad L_3(4) = 1, \qquad L_3(x) = \frac{(x+3)(x-1)}{(4+3)(4-1)}.$$

Polinomios básicos de Lagrange para tres puntos

Sean x_1, x_2, x_3 tres números diferentes a pares.

	en x_1	en x_2	en x_3
$L_1(x) =$	1	0	0
$L_2(x) =$	0	1	0
$L_3(x) =$	0	0	1

Polinomios básicos de Lagrange para tres puntos

Sean x_1, x_2, x_3 tres números diferentes a pares.

	en x_1	en x_2	en x_3
$L_1(x) = \dfrac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$	1	0	0
$L_2(x) =$	0	1	0
$L_3(x) =$	0	0	1

Polinomios básicos de Lagrange para tres puntos

Sean x_1, x_2, x_3 tres números diferentes a pares.

	en x_1	en x_2	en x_3
$L_1(x) = \dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 1}} \dfrac{x-x_k}{x_1-x_k}$	1	0	0
$L_2(x) =$	0	1	0
$L_3(x) =$	0	0	1

Polinomios básicos de Lagrange para tres puntos

Sean x_1, x_2, x_3 tres números diferentes a pares.

	en x_1	en x_2	en x_3
$L_1(x) = \dfrac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \prod\limits_{\substack{1 \le k \le 3 \\ k \ne 1}} \dfrac{x - x_k}{x_1 - x_k}$	1	0	0
$L_2(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$	0	1	0
$L_3(x) =$	0	0	1

Polinomios básicos de Lagrange para tres puntos

Sean x_1, x_2, x_3 tres números diferentes a pares.

	en x_1	en x_2	en x_3
$L_1(x) = \dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 1}} \dfrac{x-x_k}{x_1-x_k}$	1	0	0
$L_2(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 2}} \dfrac{x-x_k}{x_2-x_k}$	0	1	0
$L_3(x) =$	0	0	1

Polinomios básicos de Lagrange para tres puntos

Sean x_1, x_2, x_3 tres números diferentes a pares.

	en x_1	en x_2	en x_3
$L_1(x) = \dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 1}} \dfrac{x-x_k}{x_1-x_k}$	1	0	0
$L_2(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 2}} \dfrac{x-x_k}{x_2-x_k}$	0	1	0
$L_3(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$	0	0	1

Polinomios básicos de Lagrange para tres puntos

Sean x_1, x_2, x_3 tres números diferentes a pares.

	en x_1	en x_2	en x_3
$L_1(x) = \dfrac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \prod\limits_{\substack{1 \le k \le 3 \\ k \ne 1}} \dfrac{x - x_k}{x_1 - x_k}$	1	0	0
$L_2(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \prod\limits_{\substack{1 \le k \le 3 \\ k \ne 2}} \dfrac{x - x_k}{x_2 - x_k}$	0	1	0
$L_3(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \prod\limits_{\substack{1 \le k \le 3 \\ k \ne 3}} \dfrac{x - x_k}{x_3 - x_k}$	0	0	1

Polinomios básicos de Lagrange para tres puntos

Sean x_1, x_2, x_3 tres números diferentes a pares.

	en x_1	en x_2	en x_3
$L_1(x) = \dfrac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \prod\limits_{\substack{1 \le k \le 3 \\ k \ne 1}} \dfrac{x - x_k}{x_1 - x_k}$	1	0	0
$L_2(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \prod\limits_{\substack{1 \le k \le 3 \\ k \ne 2}} \dfrac{x - x_k}{x_2 - x_k}$	0	1	0
$L_3(x) = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \prod\limits_{\substack{1 \le k \le 3 \\ k \ne 3}} \dfrac{x - x_k}{x_3 - x_k}$	0	0	1

$$L_j(x) =$$

Polinomios básicos de Lagrange para tres puntos

Sean x_1, x_2, x_3 tres números diferentes a pares.

	en x_1	en x_2	en x_3
$L_1(x) = \dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 1}} \dfrac{x-x_k}{x_1-x_k}$	1	0	0
$L_2(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 2}} \dfrac{x-x_k}{x_2-x_k}$	0	1	0
$L_3(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 3}} \dfrac{x-x_k}{x_3-x_k}$	0	0	1

$$L_j(x) = \prod_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne j}} \frac{x-x_k}{x_j-x_k},$$

Polinomios básicos de Lagrange para tres puntos

Sean x_1, x_2, x_3 tres números diferentes a pares.

	en x_1	en x_2	en x_3
$L_1(x) = \dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 1}} \dfrac{x-x_k}{x_1-x_k}$	1	0	0
$L_2(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 2}} \dfrac{x-x_k}{x_2-x_k}$	0	1	0
$L_3(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 3}} \dfrac{x-x_k}{x_3-x_k}$	0	0	1

$$L_j(x) = \prod_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne j}} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}, \qquad L_j(x_s) =$$

Polinomios básicos de Lagrange para tres puntos

Sean x_1, x_2, x_3 tres números diferentes a pares.

	en x_1	en x_2	en x_3
$L_1(x) = \dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 1}} \dfrac{x-x_k}{x_1-x_k}$	1	0	0
$L_2(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 2}} \dfrac{x-x_k}{x_2-x_k}$	0	1	0
$L_3(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 3}} \dfrac{x-x_k}{x_3-x_k}$	0	0	1

$$L_j(x) = \prod_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne j}} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}, \qquad L_j(x_s) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad j = s; \\ 0, & \text{si} \quad j \ne s. \end{cases}$$

Polinomios básicos de Lagrange para tres puntos

Sean x_1, x_2, x_3 tres números diferentes a pares.

	en x_1	en x_2	en x_3
$L_1(x) = \dfrac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 1}} \dfrac{x-x_k}{x_1-x_k}$	1	0	0
$L_2(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 2}} \dfrac{x-x_k}{x_2-x_k}$	0	1	0
$L_3(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \prod\limits_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne 3}} \dfrac{x-x_k}{x_3-x_k}$	0	0	1

$$L_j(x) = \prod_{\substack{1\le k\le 3\\ k\ne j}} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}, \qquad L_j(x_s) = \delta_{j,s} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad j = s; \\ 0, & \text{si} \quad j \ne s. \end{cases}$$

Ejercicio

Construir los polinomios básicos de Lagrange L_1, L_2, L_3 para los puntos

$$x_1 = -3, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = 5.$$

Respuesta:

$$L_1(x) = \frac{(\qquad)(\qquad)}{(\quad)(\quad)} = \underline{\qquad\qquad\qquad},$$

$$L_2(x) =$$

$$L_3(x) =$$

Ejercicio

Construir los polinomios básicos de Lagrange L_1, L_2, L_3 para los puntos

$$x_1 = -3, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = 5.$$

Respuesta:

$$L_1(x) = \frac{(x+1)(x-5)}{(\,-2)(\,-8)} = \frac{-\,5 - 4x + x^2}{16},$$

$$L_2(x) = \frac{(x+3)(x-5)}{(2)(-6)} = \frac{-15 - 2x + x^2}{-12},$$

$$L_3(x) = \frac{(x+3)(x+1)}{(8)(6)} = \frac{3 + 4x + x^2}{48}.$$

Ejercicio (fórmulas para 4 puntos)

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números diferentes a pares.
Entonces L_2 tiene las siguientes propiedades:

$$\deg(L_2) = \quad ,$$

$$L_2(x_1) = \quad , \quad L_2(x_2) = \quad , \quad L_2(x_3) = \quad , \quad L_2(x_4) = \quad .$$

El polinomio L_2 se calcula por la fórmula

$$L_2(x) = \frac{\qquad}{\qquad} = \quad \prod$$

Ejercicio (fórmulas para 4 puntos)

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 cuatro números diferentes a pares.
Entonces L_2 tiene las siguientes propiedades:

$$\deg(L_2) = 3,$$

$$L_2(x_1) = 0, \quad L_2(x_2) = 1, \quad L_2(x_3) = 0, \quad L_2(x_4) = 0.$$

El polinomio L_2 se calcula por la fórmula

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} = \prod_{\substack{1 \le k \le 4 \\ k \neq 2}} \frac{x - x_k}{x_2 - x_k}.$$

Fórmula general y propiedades principales

Sean $x_1, \ldots, x_n$ números diferentes a pares.
Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, el j-ésimo polinomio básico de Lagrange es

$$L_j(x) = \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Fórmula general y propiedades principales

Sean $x_1, \ldots, x_n$ números diferentes a pares.
Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, el j-ésimo polinomio básico de Lagrange es

$$\boxed{L_j(x) = \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.}$$

Una notación más precisa sería $L_{x_1, \ldots, x_n, j}(x)$.

Fórmula general y propiedades principales

Sean $x_1, \ldots, x_n$ números diferentes a pares.
Para cada j en $\{1, \ldots, n\}$, el j-ésimo polinomio básico de Lagrange es

$$\boxed{L_j(x) = \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.}$$

Una notación más precisa sería $L_{x_1, \ldots, x_n, j}(x)$.

Propiedades principales del polinomio L_j:

$$L_j(x_s) = \delta_{j,s},$$

$$\deg(L_j) = n - 1.$$

¿Qué propiedades caracterizan a los polinomios básicos de Lagrange?

Sean x_1, x_2, x_3 tres puntos diferentes a pares. Entonces el polinomio

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

tiene propiedades $\quad L_1(x_1) = 1, \quad L_1(x_2) = 0, \quad L_1(x_3) = 0.$

¿Qué propiedades caracterizan a los polinomios básicos de Lagrange?

Sean x_1, x_2, x_3 tres puntos diferentes a pares. Entonces el polinomio

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

tiene propiedades $\quad L_1(x_1) = 1, \quad L_1(x_2) = 0, \quad L_1(x_3) = 0.$

Pero L_1 no es el único polinomio con estas propiedades. Sea

$$f(x) = L_1(x)\,((x - x_1)^{2015} + 1).$$

Entonces $\quad f(x_1) = 1, \quad f(x_2) = 0, \quad f(x_3) = 0.$

¿Qué propiedades caracterizan a los polinomios básicos de Lagrange?

Dados tres puntos diferentes x_1, x_2, x_3, hay muchos polinomios f tales que

$$f(x_1) = 1, \qquad f(x_2) = 0, \qquad f(x_3) = 0. \tag{$*$}$$

¿Qué propiedades caracterizan a los polinomios básicos de Lagrange?

Dados tres puntos diferentes x_1, x_2, x_3, hay muchos polinomios f tales que

$$f(x_1) = 1, \qquad f(x_2) = 0, \qquad f(x_3) = 0. \tag{$*$}$$

¿Por qué de todos ellos elegimos $\quad L_1(x) = \dfrac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$?

¿Qué propiedades caracterizan a los polinomios básicos de Lagrange?

Dados tres puntos diferentes x_1, x_2, x_3, hay muchos polinomios f tales que

$$f(x_1) = 1, \qquad f(x_2) = 0, \qquad f(x_3) = 0. \qquad (*)$$

¿Por qué de todos ellos elegimos $\quad L_1(x) = \dfrac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$?

Porque L_1 es:

- el único polinomio de grado 2 con propiedades $(*)$,
- el polinomio de grado mínimo posible con propiedades $(*)$.

¿Qué propiedades caracterizan a los polinomios básicos de Lagrange?

Dados tres puntos diferentes x_1, x_2, x_3, hay muchos polinomios f tales que

$$f(x_1) = 1, \qquad f(x_2) = 0, \qquad f(x_3) = 0. \tag{$*$}$$

¿Por qué de todos ellos elegimos $\quad L_1(x) = \dfrac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$?

Porque L_1 es:

- el único polinomio de grado 2 con propiedades $(*)$,
- el polinomio de grado mínimo posible con propiedades $(*)$.

Para demostrarlo, se usa un corolario del teorema del resto, a saber:
La proposición sobre la divisibilidad entre un producto de binomios.

Proposición sobre la divisibilidad de un polinomio entre un producto de binomios

Sea f un polinomio y sean $a_1, \ldots, a_m$ algunos ceros diferentes de f:

$$f(a_1) = \cdots = f(a_m) = 0.$$

Entonces $(x - a_1) \cdots (x - a_m) \mid f(x)$, esto es, existe un polinomio q tal que

$$f(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_m) q(x).$$

Proposición sobre los polinomios básicos de Lagrange

Sean $x_1, \ldots, x_n$ algunos números diferentes a pares y sea $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces existe un único polinomio f de grado $n-1$ tal que

$$\forall s \in \{1, \ldots, n\} \qquad f(x_s) = \delta_{j,s}. \tag{$*$}$$

Más aún, no existe f de grado $< n-1$ que cumpla con $(*)$.

Proposición sobre los polinomios básicos de Lagrange

Demostración, inicio

$$\forall s \in \{1, \ldots, n\} \qquad f(x_s) = \delta_{j,s}. \tag{$*$}$$

Existencia. Tenemos un polinomio de grado $n-1$ que cumple con $(*)$:

$$L_j(x) = \prod_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Proposición sobre los polinomios básicos de Lagrange

Demostración, final

$$\forall s \in \{1, \ldots, n\} \qquad f(x_s) = \delta_{j,s}. \qquad (*)$$

El grado $n - 1$ es el mínimo posible.

Supongamos que f cumple con $(*)$.

Entonces f tiene raíces x_s, $s \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$, y debe ser de la forma

$$f(x) = q(x) \prod_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} (x - x_k).$$

Proposición sobre los polinomios básicos de Lagrange

Demostración, final

$$\forall s \in \{1, \ldots, n\} \qquad f(x_s) = \delta_{j,s}. \qquad (*)$$

El grado $n - 1$ es el mínimo posible.

Supongamos que f cumple con $(*)$.

Entonces f tiene raíces x_s, $s \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$, y debe ser de la forma

$$f(x) = q(x) \prod_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} (x - x_k).$$

De la condición $f(x_j) = 1$ se sigue que $q \neq 0$, por eso $\deg(f) \geq n - 1$.

Proposición sobre los polinomios básicos de Lagrange

Demostración, final

$$\forall s \in \{1, \ldots, n\} \qquad f(x_s) = \delta_{j,s}. \qquad (*)$$

El grado $n - 1$ es el mínimo posible.

Supongamos que f cumple con $(*)$.

Entonces f tiene raíces x_s, $s \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$, y debe ser de la forma

$$f(x) = q(x) \prod_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} (x - x_k).$$

De la condición $f(x_j) = 1$ se sigue que $q \neq 0$, por eso $\deg(f) \geq n - 1$.

Unicidad para el grado $n - 1$.

Supongamos que f cumple con $(*)$ y $\deg(f) = n - 1$.

Proposición sobre los polinomios básicos de Lagrange

Demostración, final

$$\forall s \in \{1, \ldots, n\} \qquad f(x_s) = \delta_{j,s}. \qquad (*)$$

El grado $n-1$ es el mínimo posible.

Supongamos que f cumple con $(*)$.

Entonces f tiene raíces x_s, $s \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$, y debe ser de la forma

$$f(x) = q(x) \prod_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} (x - x_k).$$

De la condición $f(x_j) = 1$ se sigue que $q \neq 0$, por eso $\deg(f) \geq n-1$.

Unicidad para el grado $n-1$.

Supongamos que f cumple con $(*)$ y $\deg(f) = n-1$.

Entonces q debe ser una constante no nula: $q(x) = c$.

Sustituyendo $x = x_j$ vemos que c se determina de manera única.

Planes para futuro

Planes para futuro

- Construir los polinomios básicos de Lagrange asociados a 4 puntos (para que sea más claro cómo programar el algoritmo).

Planes para futuro

- Construir los polinomios básicos de Lagrange asociados a 4 puntos (para que sea más claro cómo programar el algoritmo).
- Aplicar los polinomios básicos de Lagrange
para construir el polinomio interpolante con la fórmula de Lagrange.

Planes para futuro

- Construir los polinomios básicos de Lagrange asociados a 4 puntos (para que sea más claro cómo programar el algoritmo).
- Aplicar los polinomios básicos de Lagrange
  para construir el polinomio interpolante con la fórmula de Lagrange.

¡Gracias por su paciencia!