

Ejemplo de factorización PLU

Egor Maximenko

<https://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional,
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México, Ciudad de México

14 de junio de 2022

Algoritmo de factorización LU
(guardando L y U juntas)

Prerrequisitos

Matrices de permutación

Factorización PLU

```
graph TD; A[Algoritmo de factorización LU (guardando L y U juntas)] --> C[Factorización PLU]; B[Matrices de permutación] --> C;
```

Problema de factorización PLU

Hallar una factorización PLU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix}.$$

Problema de factorización PLU

Hallar una factorización PLU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix}.$$

Se buscan matrices P, L, U tales que

- $PA = LU$,
- P es una matriz de permutación,
- L es unitriangular inferior,
- U es triangular superior.

Problema de factorización PLU

Hallar una factorización PLU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix}.$$

Una matriz puede tener varias factorizaciones PLU.

Se buscan matrices P, L, U tales que

- $PA = LU$,
- P es una matriz de permutación,
- L es unitriangular inferior,
- U es triangular superior.

Problema de factorización PLU

Hallar una factorización PLU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix}.$$

Se buscan matrices P, L, U tales que

- $PA = LU$,
- P es una matriz de permutación,
- L es unitriangular inferior,
- U es triangular superior.

Una matriz puede tener varias factorizaciones PLU.

En este ejemplo una respuesta posible es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \xlongequal{\quad} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 += -3R_1} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -5 & -2 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & & & \\ 6 & & & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & & & \\ 6 & & & \\ -5 & & & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & & \\ 6 & & & \\ -5 & & & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & & & \\ -5 & & & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & & & \\ -5 & & & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & & \\ -5 & & & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & \\ -5 & & & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & & & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & 5 & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ R_4 += 5R_1 \end{array}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$P_{1,3,2,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$P_{1,3,2,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$P_{1,3,2,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 += 0R_2 \\ \underline{\underline{\hspace{1.5cm}}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & & \\ -5 & & & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$P_{1,3,2,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 += 0R_2 \\ \underline{\underline{R_4 += 4R_2}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$P_{1,3,2,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 += 0R_2 \\ \underline{\underline{R_4 += 4R_2}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$P_{1,3,2,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 += 0R_2 \\ \underline{\underline{R_4 += 4R_2}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$P_{1,3,2,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 += 0R_2 \\ \underline{\underline{R_4 += 4R_2}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & 1 & \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$P_{1,3,2,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 += 0R_2 \\ \underline{\underline{R_4 += 4R_2}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$P_{1,3,2,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 += 0R_2 \\ \underline{\underline{R_4 += 4R_2}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$P_{1,3,2,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 += 0R_2 \\ \underline{\underline{R_4 += 4R_2}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4}$$

$$P_{1,3,4,2}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución (en cada paso $PA = LU$)

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 += -3R_1 \\ R_3 += -6R_1 \\ \underline{\underline{R_4 += 5R_1}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$P_{1,3,2,4}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -12 & 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 += 0R_2 \\ \underline{\underline{R_4 += 4R_2}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4}$$

$$P_{1,3,4,2}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \underline{\underline{R_4 += 0R_3}} \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} .$$

El último estado de la solución es

$$P_{1,3,4,2} A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

El último estado de la solución es

$$P_{1,3,4,2}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & -1 & -3 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_P \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_U.$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & & 2 & & & & 4 & & & & 3 \\ 30 & & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & & & \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & & \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & & & \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & & \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & 12 + 0 + 0 & \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & 12 + 0 + 0 & 9 + 0 + 0 - 2 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$\begin{aligned} LU &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & 12 + 0 + 0 & 9 + 0 + 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & 12 + 0 + 0 & 9 + 0 + 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$P_{1,3,4,2} A = P_{1,3,4,2} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & 12 + 0 + 0 & 9 + 0 + 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$P_{1,3,4,2} A = P_{1,3,4,2} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & 12 + 0 + 0 & 9 + 0 + 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$P_{1,3,4,2} A = P_{1,3,4,2} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & 12 + 0 + 0 & 9 + 0 + 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$P_{1,3,4,2} A = P_{1,3,4,2} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & 12 + 0 + 0 & 9 + 0 + 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$P_{1,3,4,2} A = P_{1,3,4,2} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & 12 + 0 + 0 & 9 + 0 + 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$P_{1,3,4,2} A = P_{1,3,4,2} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & 12 + 0 + 0 & 9 + 0 + 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$P_{1,3,4,2} A = P_{1,3,4,2} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & 12 + 0 + 0 & 9 + 0 + 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$P_{1,3,4,2} A = P_{1,3,4,2} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & 12 + 0 + 0 & 9 + 0 + 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$P_{1,3,4,2} A = P_{1,3,4,2} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & 12 + 0 + 0 & 9 + 0 + 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$P_{1,3,4,2} A = P_{1,3,4,2} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

Comprobación

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 12 + 3 & 24 - 1 & 18 - 3 \\ -25 & -10 - 12 & -20 + 4 + 1 & -15 + 12 + 0 \\ 15 & 6 + 0 & 12 + 0 + 0 & 9 + 0 + 0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$P_{1,3,4,2} A = P_{1,3,4,2} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 3 \\ 30 & 15 & 23 & 15 \\ -25 & -22 & -15 & -3 \\ 15 & 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

Ejercicio

Construir una factorización PLU de la siguiente matriz y hacer la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 11 & 6 \\ 6 & 8 & 1 & 20 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio

Construir una factorización PLU de la siguiente matriz y hacer la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 11 & 6 \\ 6 & 8 & 1 & 20 \end{bmatrix}.$$

¡Ejercer para aprender!

Ejercicio

Construir una factorización PLU de la siguiente matriz y hacer la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 11 & 6 \\ 6 & 8 & 1 & 20 \end{bmatrix}.$$

¡Ejercer para aprender!

Una respuesta posible:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$