Algoritmo de factorización PLU

Objetivos. Estudiar el algoritmo de factorización PLU de una matriz cuadrada invertible.

Requisitos. Factorización LU, matrices de permutación.

1. Definición (factorización PLU). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible. Una terna de matrices (P, L, U) se llama *factorización* PLU de A si $P, L, U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $PA = LU$, U es una matriz triangular superior con elementos diagonales no nulos, L es una matriz triangular inferior con elementos diagonales iguales a 1 y P es una matriz de permutación.

2. Ejemplo. Encontrar una factorización PLU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución.

$$P_{1,2,3}A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad \xrightarrow{\substack{R_2 \mathrel{+}= 2R_1 \\ R_3 \mathrel{+}= -2R_1}}$$

$$P_{1,2,3}A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$P_{1,3,2}A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Factorización PLU en forma explícita:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 2+0+0 & 2+0+0 & 3+0+0 \\ 4+0+0 & 4+4+0 & 6-3+0 \\ -4+0+0 & -4+0+0 & -6+0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix} = P_{1,3,2}A. \qquad \checkmark$$

$\square$

3. Ejemplo. Usando una factorización PLU resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Solución. Para aplicar la factorización $P_{1,3,2}A = LU$ del ejemplo anterior multiplicamos ambos lados de la ecuación por la matriz de permutación $P_{1,3,2}$:

$$LUx = c, \qquad \text{donde} \qquad c = P_{1,3,2}b = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Denotamos Ux por y. Primero resolvemos el sistema $Ly = c$:

$$Ly = c: \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1 & & & & & = & -7 \\ 2y_1 & + & y_2 & & & = & 5 \\ -2y_1 & & & + & y_3 & = & -1 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} y_1 = -7 \\ y_2 = 5 - 2y_1 = 19 \\ y_3 = -1 + 2y_1 = -15 \end{array}$$

Ahora resolvemos el sistema $Ux = y$:

$$Ux = y: \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -7 \\ & & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 19 \\ & & & & 3x_3 & = & -15 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} x_1 = (-7 - 2x_2 - 3x_3)/2 = 3 \\ x_2 = (19 + 3x_3)/4 = 1 \\ x_3 = -5 \end{array}$$

Respuesta:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -4 & -3 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + 2 - 15 \\ -12 - 4 + 15 \\ 12 + 8 - 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}. \qquad \checkmark \qquad \square$$

4. Ejemplo. Encontrar una factorización PLU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución.

$$P_{1,2,3}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

$$P_{2,1,3}A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad \xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= -2R_1]{R_2 \mathrel{+}= 0R_1}$$

$$P_{2,1,3}A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$P_{2,3,1}A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Factorización PLU en forma explícita:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 1+0+0 & 3+0+0 & 2+0+0 \\ 2+0+0 & 6+2+0 & 4+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = P_{2,3,1}A. \qquad \checkmark \qquad \square$$

5. Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Solución. El sistema de ecuaciones dado se puede escribir como $Ax = b$. En el ejemplo anterior hemos obtenido una factorización $PA = LU$ para esta misma matriz A. Para aplicar esta factorización multipliquemos ambos lados de la igualdad $Ax = b$ por P por la izquierda:

$$PAx = c, \qquad \text{donde} \qquad c = Pb = P_{2,3,1} \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Para resolver la ecuación $LUx = c$ denotamos Ux por y y resolvemos la ecuación $Ly = c$:

$$Ly = c\colon \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} y_1 & & & & & = & 1 \\ 2y_1 & + & y_2 & & & = & 6 \\ & & & & y_3 & = & -8 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = 6 - 2y_1 = 4 \\ y_3 = -8 \end{array}$$

Luego consideramos la ecuación $Ux = y$:

$$Ux = y\colon \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & & & = & 4 \\ & & & & 4x_3 & = & -8 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} x_1 = 1 - 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_2 = 4/2 = 2 \\ x_3 = -8/4 = -2 \end{array}$$

Respuesta:

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0 - 8 \\ -1 + 6 - 4 \\ -2 + 16 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = b. \qquad \checkmark \qquad \square$$

6. Ejemplo. Construir una factorización PLU de la siguiente matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución.

$$P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \mathrel{+}= -2R_1 \\ R_3 \mathrel{+}= R_1 \\ R_4 \mathrel{+}= R_1}} P_{1,2,3,4}A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \\ 8 & 3 & 0 & \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$P_{1,3,2,4}A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 8 & 3 & 0 & \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \mathrel{+}= -2R_2} P_{1,3,2,4}A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4}$$

$$P_{1,3,4,2}A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} LU &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3+0+0+0 & 1+0+0+0 & 1+0+0+0 & 0+0+0+0 \\ 3+0+0+0 & -1+4+0+0 & -1+3+0+0 & 0-1+0+0 \\ 3+0+0+0 & -1+8+0+0 & -1+6-3+0 & 0-2+2+0 \\ -6+0+0+0 & 2+0+0+0 & 2+0+0+0 & 0+0+0+2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = P_{1,3,4,2}A. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

□

7. Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones lineales a través de una factorización PLU:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 8 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. Ejercicio. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales a través de una factorización PLU:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

9. Ejercicio. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales a través de una factorización PLU:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -12 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$