Interpolación de Newton en diferencias progresivas

Objetivos. Estudiar la contrucción del polinomio interpolante a través de las diferencias progresivas en el caso cuando las abscisas de los nodos de interpolación son equidistantes.

Requisitos. Diferencias progresivas de una sucesión, diferencias divididas, fórmula de Newton para el polinomio interpolante.

1. Fórmula de Newton para el polinomio interpolante (repaso). Sea f una función definida en algunos puntos $x_0, \ldots, x_n$. Denotemos por $y_0, \ldots, y_n$ sus valores correspondientes. Recordamos la fórmula de Newton para el polinomio interpolante que tiene valores $y_i = f[x_i]$ en los puntos x_i:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Aquí las diferencias divididas $f[x_0, \ldots, x_k]$ se definen de manera recursiva:

$$f[x_i] = f(x_i) = y_i, \qquad f[x_i, \ldots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}.$$

2. El caso de puntos equidistantes. En esta sección se considera el caso particular cuando los puntos $x_0, \ldots, x_n$ son equidistantes:

$$x_k = x_0 + kh, \qquad 0 \le k \le n.$$

En este caso es cómodo hacer el cambio de variables $x = x_0 + hs$.

3. Ejercicio: Expresión del producto a través de la variable nueva. Haga el cambio de variables $x = x_0 + hs$ y exprese a través de s el siguiente producto:

$$\prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1}).$$

Para escribir la respuesta en una forma corta use la notación del coeficiente binominal:

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1) \cdot \ldots \cdot (s-k+1)}{k!}.$$

4. Diferencias progresivas de una sucesión (repaso). Las diferencias progresivas de una sucesión $y_0, y_1, y_2, \ldots$ se definen de manera recursiva:

$$(\Delta^0 y)_i \coloneqq y_i, \qquad (\Delta^{k+1} y)_i \coloneqq (\Delta^k y)_{i+1} - (\Delta^k y)_i.$$

En particular,

$$\begin{aligned}(\Delta^1 y)_i &\coloneqq (\Delta^0 y)_{i+1} - (\Delta^0 y)_i = y_{i+1} - y_i,\\ (\Delta^2 y)_i &\coloneqq (\Delta^1 y)_{i+1} - (\Delta^1 y)_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.\end{aligned}$$

5. Ejercicio: Expresión de las diferencias divididas a través de las diferencias progresivas. Los puntos x_i son equidistantes, por eso los denominadores de las diferencias divididas se escriben en términos de h y los numeradores en términos de las diferencias progresivas, por ejemplo

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{(\Delta y)_i}{h}.$$

Las diferencias divididas de orden 2 se expresan a través de h y $(\Delta^2 y)_i$:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$$

Las diferencias divididas de orden 3 se escriben en términos de h y $(\Delta^3 y)_i$:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \frac{\ldots}{\ldots} = \ldots$$

Adivine la fórmula general, esto es, exprese $f[x_i, \ldots, x_j]$ a través de h y $(\Delta^k y)_i$:

$$f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}] =$$

6. Proposición (interpolación de Newton en diferencias progresivas). Sea P el polinomio de grado $\le n$ que en los puntos $x_0, x_0 + h, \ldots, x_0 + nh$ toma los valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$, respectivamente. Entonces

$$P(x_0 + hs) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} (\Delta^k y)_0. \tag{1}$$

Demostración. Partimos de la fórmula de Newton para el polinomio interpolante:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j). \tag{2}$$

Hacemos el cambio de variable $x = x_0 + hs$ y escribimos el producto de los binomios $x - x_j$ en términos de la variable s:

$$\prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = h^k s(s-1) \cdot \ldots \cdot (s-k+1) = k!\, h^k \binom{s}{k}. \tag{3}$$

Expresamos las diferencias divididas $f[x_0, \ldots, x_k]$ a través de las diferencias progresivas $(\Delta^k y)_0$:

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{1}{k!\, h^k} (\Delta^k y)_0. \tag{4}$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2) obtenemos (1). □

7. Ejemplo. Construir el polinomio P de grado ≤ 3 que en los puntos $-1/2, 0, 1/2, 1$ tome los valores $-4, 3, 13/2, 8$.

Solución. Primero construimos la tabla de las diferencias divididas:

$$\begin{array}{cccc} -4 & 7 & -7/2 & 3/2 \\ 3 & 7/2 & -2 & \\ 13/2 & 3/2 & & \\ 8 & & & \end{array}$$

Aplicamos la fórmula (1):

$$\begin{aligned} Q(t) = P(-1/2 + t/2) &= -4 + 7s - \frac{7}{2}\,\frac{s(s-1)}{2} + \frac{3}{2}\,\frac{s(s-1)(s-2)}{6} \\ &= -4 + \frac{37s}{4} - \frac{5s^2}{2} + \frac{s^3}{4}. \end{aligned}$$

Luego

$$P(x) = Q(2x+1) = 2x^3 - 7x^2 + 10x + 3.$$ □

8. Ejercicio. Construya el polinomio P de grado ≤ 3 que en los puntos $-3, -1, 1, 3$ tome los valores $-144, -16, 8, 24$.