Diferencias divididas e interpolación de Newton

Diferencias divididas

Definición de diferencias divididas de órdenes 0, 1 y 2.

$$\Delta_f(x_1) := f(x_1),$$
$$\Delta_f(x_1, x_2) := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$
$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) := \frac{\Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}.$$

Definición recurrente. En general, se definen por inducción:

$$\Delta_f(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \frac{f(x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_1}.$$

1. Fórmula simétrica para las diferencias divididas del primer orden.

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

2. Fórmula simétrica para las diferencias divididas del segundo orden. Represente $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ como una combinación lineal de los valores $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$:

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1)\alpha_1 + f(x_2)\alpha_2 + f(x_3)\alpha_3.$$

Aquí $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ deben ser expresiones de x_1, x_2, x_3 y no depender de $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$.

3. Tarea adicional: fórmula simétrica para las diferencias divididas. Hallar una fórmula directa (no recursiva) para $\Delta_f(x_1, \ldots, x_n)$ y demostrarla por inducción.

4. Propiedad simétrica. Es posible demostrar que las diferencias divididas no dependen del orden de los argumentos.

5. Funciones crecientes y diferencias divididas de primer orden. Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es creciente en I;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \geq 0$ para todos $x_1, x_2 \in I$ distintos.

6. Tarea adicional: funciones convexas y diferencias divididas de segundo orden. Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es convexa en I, i.e. $f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$ para todos $x_1, x_2 \in I$ y todos $\lambda, \mu \geq 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in I$ distintos.

Diferencias finitas y polinomio interpolante

7. Teorema. Sean $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ puntos distintos, $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Sea P el polinomio interpolante tal que $P(x_k) = y_k$ y $\deg(P) \le n$. Entonces

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

8. Ejemplo. Calcular el polinomio interpolante P tal que $\deg(P) \le 2$, $P(-2) = 11$, $P(1) = -4$, $P(2) = -5$. Respuesta:

$$P(x) = 11 - 5(x+2) + (x+2)(x-1) = x^2 - 4x - 1.$$

9. Ejemplo. Construir el polinomio interpolante P tal que $\deg(P) \le 3$,

$$P(-2) = -35, \qquad P(-1) = -11, \qquad P(1) = -5, \qquad P(3) = 25.$$

Calcular $P(2)$ y $P(-3)$. Desarrollar P en las potencias de x. Respuesta:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5, \qquad P(-1) = -11, \qquad P(-3) = -89.$$

10. Ejercicio. Construir el polinomio P tal que $\deg(P) \le 2$,

$$P(-2) = 3, \qquad P(0) = -1, \qquad P(1) = 6.$$

Calcular $P(2)$. Desarrollar P en las potencias de x. Hacer las comprobaciones.

11. Ejercicio. Construir el polinomio P tal que $\deg(P) \le 3$,

$$P(-2) = -3, \qquad P(-1) = -1, \qquad P(0) = 3, \qquad P(2) = -7.$$

Calcular $P(1)$. Desarrolar P en las potencias de x. Hacer las comprobaciones.