Fórmulas recursivas de Neville para el polinomio interpolante

Objetivos. Demostrar las fórmulas recursivas de Neville para el polinomio interpolante y practicarla con un algunos ejemplos.

Requisitos. Concepto de interpolación polinomial, existencia y unicidad del polinomio interpolante.

1. Notación para el método de Neville. Sean $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ algunos números diferentes a pares, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ algunos números, y sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \le j$. Denotemos por $P_{i,j}$ al polinomio interpolante asociado a las abscisas $x_i, \ldots, x_j$ y las ordenadas $y_i, \ldots, y_j$. En otras palabras, $P_{i,j}$ es un polinomio de grado $\le j - i$ que tiene valores $y_i, \ldots, y_j$ en los puntos $x_i, \ldots, x_j$:

$$\deg(P_{i,j}) \le j - i, \qquad \forall k \in \{i, \ldots, j\} \quad P_{i,j}(x_k) = y_k.$$

2. Ejemplo. Sean $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, $f(x) = e^x$. Construir $P_{1,2}$.

3. Teorema (fórmula recurrente de Neville para los polinomios interpolantes). Sean $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ algunos números diferentes a pares, y sean $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ algunos números. Entonces para cualesquiera $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \le j$,

$$\boxed{P_{i,j}(x) = \frac{(x - x_i)P_{i+1,j}(x) - (x - x_j)P_{i,j-1}(x)}{x_j - x_i}.}$$

Idea de demostración. Sea $Q(x)$ el polinomio en el segundo miembro de la fórmula. Entonces es fácil ver que $\deg(Q) \le j - i$ y $Q(x_k) = y_k$ para todo $k \in \{i, \ldots, j\}$. Notamos que los polinomios $P_{i,j}$ y Q son de grados $\le j - i$ y toman los mismos valores en $j - i + 1$ puntos $x_i, \ldots, x_j$. Por el teorema principal sobre la interpolación polinomial, los polinomios Q y $P_{i,j}$ coinciden. $\square$

4. El método de Neville para $n = 2$.

$$P_{1,1}(x) = y_1,$$

$$P_{2,2}(x) = y_2, \qquad P_{1,2}(x) = \frac{(x-x_1)P_{2,2}(x) - (x-x_2)P_{1,1}(x)}{x_2 - x_1},$$

$$P_{3,3}(x) = y_3, \qquad P_{2,3}(x) = \frac{(x-x_2)P_{3,3}(x) - (x-x_3)P_{2,2}(x)}{x_3 - x_2}, \qquad P_{1,3}(x) = \frac{(x-x_1)P_{2,3}(x) - (x-x_3)P_{1,2}(x)}{x_3 - x_1}.$$

5. Ejemplo. Aplique el método de Neville para construir el polinomio interpolante P tal que $P(-1) = 15$, $P(4) = 5$, $P(5) = 9$.

$$
\begin{array}{llll}
x_1 = -1, & P_{1,1}(x) = 15, & & \\
x_2 = 4, & P_{2,2}(x) = 5, & P_{1,2}(x) = -2x + 13, & \\
x_3 = 5 & P_{3,3}(x) = 9, & P_{2,3}(x) = 4x - 11, & P_{1,3}(x) = x^2 - 5x + 9.
\end{array}
$$

Respuesta: $P(x) = x^2 - 5x + 9$.

6. Ejemplo. Aplique el método de Neville para aproximar $\sqrt{2}$ con la función $f(x) = \sqrt{x}$ y los puntos $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 9$.

7. Ejercicio. Aplique el método de Neville para construir el polinomio interpolante P tal que $P(-2) = -7$, $P(-1) = -6$, $P(3) = 18$. Respuesta: $P(x) = x^2 + 4x - 3$.

8. Ejemplo. Aplique el método de Neville para aproximar $\sqrt{2}$ con la función $f(x) = 2^x$ y los puntos $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

9. Problema de programación. En un lenguaje de programación escribir una función que calcule los coeficientes del polinomio interpolante usando la fórmula recursiva de Neville. Se recomienda guardar los polinomios auxiliares en una tabla, de la misma manera como se guardan las diferencias divididas en algorirmo de Newton. Calcular el número de operaciones de multiplicación y división que se ejecutan en este algoritmo.