Método de Müller

Objetivos. Conocer el método de Müller que se usa para calcular aproximadamente los ceros de una función.

Requisitos. Método de la secante, fórmula de las raíces de la ecuación cuadrática, números complejos.

Repaso: método de la secante. Buscamos una raíz de la función f. El método de la secante utiliza *dos aproximaciones anteriores* x_{n-2} y x_{n-1} para contruir x_n. Se calcula la intersección del eje de abscisas con la recta que une los puntos

$$(x_{n-2}, f(x_{n-2})), \qquad \text{y} \qquad (x_{n-1}, f(x_{n-1})).$$

Desde el punto de vista analítico, se construye un *polinomio lineal* (un polinomio de grado ≤ 1) que coincide con f en los puntos x_{n-2} y x_{n-1}, luego se calcula una raíz de este polinomio.

El método de Müller está basado en la misma idea, pero en cada paso se utilizan *tres aproximaciones anteriores* y la función f se reemplaza por un *polinomio cuadrático.*

Idea del método de Müller. En el n-ésimo paso se calcula x_n usando tres puntos anteriores. Se construye un polinomio $P(x)$ de grado ≤ 2 cuyos valores en los puntos $x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}$ coinciden con los valores correspondientes de la función f. Geométricamente (en el caso real) construimos la parábola que pasa por los puntos

$$\big(x_{n-3}, f(x_{n-3})\big), \qquad \big(x_{n-2}, f(x_{n-2})\big), \qquad \big(x_{n-1}, f(x_{n-1})\big).$$

Definimos x_n como la raíz de P más cercana al punto x_{n-1}. Geométricamente (en el caso real), buscamos la intersección de la parábola con el eje de abscisas.

1. Diferencias divididas.

$$\Delta_f(x_0, x_1) := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \qquad \Delta_f(x_0, x_1, x_2) := \frac{\Delta_f(x_1, x_2) - \Delta_f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}.$$

Para las diferencias divididas se usan frecuentemente las notaciones $f[x_0, x_1]$ y $f[x_0, x_1, x_2]$.

2. Ejercicio. Escriba la diferencia dividida de segundo orden $\Delta_f(x_0, x_1, x_2)$ como una combinación lineal de $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$. Demuestre que $\Delta_f(x_0, x_1, x_2)$ es una función simétrica de sus argumentos x_0, x_1, x_2.

3. Fórmulas para calcular los coeficientes del polinomio cuadrático. Calcular los coeficientes a y b del polinomio $a(x-x_2)^2+b(x-x_2)+c$ que coincide con f en los puntos x_0, x_1 y x_2. Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a(x_0-x_2)^2+b(x_0-x_2)+c=f(x_0); \\ a(x_1-x_2)^2+b(x_1-x_2)+c=f(x_1); \\ c=f(x_2). \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{aligned} a &= \Delta_f(x_0,x_1,x_2); \\ b &= \Delta_f(x_0,x_2)+\Delta_f(x_1,x_2)-\Delta_f(x_0,x_1); \\ c &= f(x_2). \end{aligned}$$

4. Fórmulas para calcular x_n.

$$x_n = x_{n-1} + \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = x_{n-1} - \frac{2c}{b \mp \sqrt{b^2-4ac}}.$$

El signo se elige de tal manera que el denominador sea el más grande. Entonces el punto x_n estará cerca del punto x_{n-1}.

5. Velocidad de convergencia. El órden de convergencia del método de Müller en el caso $f'(p) \neq 0$ es igual a r, donde r es la raíz positiva de la ecuación $x^3-x^2-x-1=0$. Aproximadamente $p \approx 1.84$. Recordemos que en el método de Newton el órden de convergencia es 2, y en el método de la secante es ≈ 1.62.

6. Ejemplo. Calcular el punto x_3 con el método de Müller si

$$f(x)=x^5-2, \quad x_0=0, \quad x_1=2, \quad x_2=1.$$

7. Ejemplo. Calcular el punto x_3 con el método de Müller si

$$f(x)=(x-3)(x^2+1)=x^3-3x^2+x-3, \quad x_0=-1, \quad x_1=1, \quad x_2=0.$$

8. Deflación. Para calcular (aproximadamente) todos los cero de un polinomio $f(x)$ se usa el siguiente procedimiento llamado *deflación*. Se encuentra una aproximación $\tilde{x}_1$ a un cero del polinomio $f(x)$ y se divide $f(x)$ entre $(x-x_1)$:

$$f(x)=(x-\tilde{x}_1)f_2(x)+r_1.$$

Como $\tilde{x}_1$ es una aproximación a una raíz del polinomio, el valor del residuo r_1 es pequeño, así que $f(x) \approx (x-\tilde{x}_1)f_2(x)$.

En el segundo paso se busca una aproximación $\tilde{x}_2$ a una raíz del polinomio $f_2(x)$. $f_3(x)$ se define como el resultado de dividir $f_2(x)$ entre $(x-\tilde{x}_2)$, etc.

Es natural suponer que $\tilde{x}_2$ también aproxima a una raíz de $f(x)$. Para mejorar la exactitud se puede aplicar el método de Newton a f y $\tilde{x}_2$.