Teorema del valor medio (repaso) y funciones Lipschitz continuas

1. Teorema del valor medio (teorema de Lagrange). Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b). Entonces existe al menos un punto c en el intervalo (a,b) tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

2. Sentido geométrico del teorema del valor medio. La igualdad

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

significa que la tangente a la gráfica de la función f en el punto $(c, f(c))$ es paralela a la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

3. Intervalos de la recta real. Recordemos que cada *intervalo* no trivial de la recta real tiene una de las siguientes formas (donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$):

$$[a,b], \quad [a,b), \quad (a,b], \quad [a,+\infty), \quad (a,+\infty), \quad (-\infty,b], \quad (-\infty,b), \quad \mathbb{R}.$$

Dado un intervalo X en $\mathbb{R}$, denotemos por $\operatorname{int}(X)$ al *interior* de X que consiste de todos los *puntos interiores* de X. Para los intervalos escritos arriba sus interiores son los siguientes:

$$(a,b), \quad (a,b), \quad (a,b), \quad (a,+\infty), \quad (a,+\infty), \quad (-\infty,b), \quad (-\infty,b), \quad \mathbb{R}.$$

A continuación vamos a suponer que X es algún intervalo no trivial en $\mathbb{R}$.

4. Definición (función Lipschitz continua). Sea X un intervalo en $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *Lipschitz continua* si existe una constante $L \geq 0$ tal que

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1| \qquad \forall x_1, x_2 \in X.$$

5. Ejercicio. Sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz continua en X. Demuestre que f es continua en este intervalo.

6. Ejercicio. Recuerde la definición de la función *uniformemente continua*. Demuestre que cualquier función Lipschitz continua en un intervalo X es uniformemente continua en este invervalo.

7. Proposición (cualquier función con derivada acotada es Lipschitz continua). Sea X un intervalo y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua en X, derivable en $\operatorname{int}(X)$ y tal que su derivada es acotada. Entonces f es Lipschitz continua en X.

Demostración. Supongamos que $M \ge 0$ tal que

$$|f'(x)| \le M \qquad \forall x \in \operatorname{int}(X). \tag{1}$$

Vamos a demostrar que f es Lipschitz continua en X y que M es una coeficiente de Lipschitz para f en X. Sean $x_1, x_2 \in X$. Hay tres casos: $x_1 < x_2$, $x_1 = x_2$ y $x_1 > x_2$. Primero consideremos el caso $x_1 < x_2$.

Apliquemos el teorema del valor intermedio a la función f en el intervalo $[x_1, x_2]$. Por este teorema, existe un punto $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Notemos que $c \in (x_1, x_2) \subset \operatorname{int}(X)$. Sacando el valor absoluto y aplicando la hipótesis (1) obtenemos que

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)|\,|x_2 - x_1| \le M\,|x_2 - x_1|.$$

El caso $x_1 > x_2$ se considera de manera similar (sólo se intercambian los papeles de x_1 y x_2), y en el caso $x_1 = x_2$ tenemos que $|f(x_2) - f(x_1)| = 0 = M\,|x_2 - x_1|$. □

8. Proposición (cualquier función continuamente derivable en un intervalo finito cerrado es Lipschitz continua). Sea $f \in C^1([a, b])$, esto es, f es derivable en $[a, b]$ y f' es continua en $[a, b]$. Entonces f es Lipschitz continua en $[a, b]$.

Demostración. Se sabe que una función continua en un intervalo finito y cerrado es acotada. Por consecuencia, f' es acotada, y podemos aplicar la proposición anterior. □

9. Ejemplo. Mostrar que la función cos es Lipschitz continua en $\mathbb{R}$.

Primera solución. Notamos que $\operatorname{sen}' = \cos$ y

$$|\cos(x)| \le 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$ □

Segunda solución, sin usar la derivada.

$$|\cos(x_2) - \cos(x_1)| = \left| 2 \operatorname{sen} \frac{x_1 - x_2}{2} \operatorname{sen} \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \le 2 \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2} \cdot 1 = |x_1 - x_2|.$$ □

10. Ejercicio. Demuestre que la función sen es Lipschitz continua en $\mathbb{R}$.

11. Ejercicio. Demuestre que la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ cumple con una condición de Lipschitz en el intervalo $[a, +\infty)$, donde $0 < a < 1$.

12. Ejercicio. Demuestre que la función $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x)$ cumple con una condición de Lipschitz en el intervalo $\mathbb{R}$.

13. Ejercicio. Demuestre que la función $f(x) = x^2$ es Lipschitz continua en $[-10, 10]$.

14. Ejemplo. La función $f(x) = x^2$ no es Lipschitz continua en $\mathbb{R}$.

Demostración. Razonando por contradicción supongamos que $L \geq 0$ y para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ se cumple la desigualdad

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L\,|x_2 - x_1|.$$

Entonces para cualesquiera $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ se debe cumple la desigualdad

$$\frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{x_2 - x_1} \leq L.$$

En particular, si $x_1 = 0$ y $x_2 = n$ con un $n \in \{1, 2, \ldots\}$ arbitrario, entonces

$$\frac{n^2 - 0}{n - 0} \leq L,$$

o sea $n \leq L$. Pero n es arbitrario, y el número L debe ser mayor o igual que cualquier número entero positivo n. No existe ningún L con esta propiedad, así llegamos a una contradicción. $\square$

15. Ejercicio. Demuestre que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no es Lipschitz continua en $(0, +\infty)$.

16. Ejercicio. Demuestre que la función $f(x) = \sqrt{x}$ no es Lipschitz continua en $[0, +\infty)$.

Suma y producto de funciones Lipschitz continuas

17. Proposición. Sean f y g funciones Lipschitz continuas en un intervalo X. Entonces su suma $h = f + g$ también es Lipschitz continua en X.

18. Ejercicio. Sea f una función Lipschitz continua en un intervalo X y sea α un número. Demuestre que la función αf es Lipschitz continua en X.

19. Ejercicio. Sea X un intervalo finito, es decir $X \subseteq [-c, c]$ para algún $c > 0$, y sean f y g funciones Lipschitz continuas. Demuestre que su producto $h = fg$ también es una función Lipschitz continua en X.