

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

Egor Maximenko

<http://esfm.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional,
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México, D.F.

21 de marzo de 2015

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix}$$

Vamos a construir dos matrices L y U tales que

L es unitriangular inferior,

U es triangular superior,

$A = LU$.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 \\ ? & ? & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}.$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ \text{P} & -6 & 6 & -5 \\ \text{P} & 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ \text{Pac-Man} & -6 & 6 & -5 \\ \text{Pac-Man} & 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ \text{Pac-Man} & -6 & 6 & -5 \\ \text{Pac-Man} & 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & & \\ 2 & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ \text{Pac-Man} & -6 & 6 & -5 \\ \text{Pac-Man} & 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 += 3R_1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & & \\ 2 & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ \text{Pac-Man} & -6 & 6 & -5 \\ \text{Pac-Man} & 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & & \\ 2 & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -7 \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & & \end{bmatrix}.$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & & \end{bmatrix}.$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 3 + 3 & \\ & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 3 + 3 & -9 + 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 3 + 3 & -9 + 4 \\ 4 & & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 3 + 3 & -9 + 4 \\ 4 & -2 - 6 & \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 3 + 3 & -9 + 4 \\ 4 & -2 - 6 & 6 - 8 - 5 \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 3+3 & -9+4 \\ 4 & -2-6 & 6-8-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix}$$

Factorización LU en acción (ejemplo 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 += 3R_1 \\ R_3 += (-2)R_1}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += 2R_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$LU = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 3+3 & -9+4 \\ 4 & -2-6 & 6-8-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -6 & 6 & -5 \\ 4 & -8 & -7 \end{bmatrix} = A. \quad \checkmark$$

Ejercicio

Construir la factorización LU de la siguiente matriz y hacer la comprobación:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -8 & -2 & 6 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio

Construir la factorización LU de la siguiente matriz y hacer la comprobación:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -8 & -2 & 6 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

¡Gracias por su tiempo!