Interpolación de Hermite

Definición (polinomio osculante). Sean $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ números distintos y $m_i \geq 0$ un entero no negativo asociado a x_i para $i \in \{0, \ldots, n\}$. Supongamos que $f \in C^m[a, b]$, donde $m = \max\{m_0, \ldots, m_n\}$. El *polinomio osculante* que aproxima f es el polinomio P de menor grado que concuerda con la función f y con todas sus derivadas de orden $\leq m_i$ en x_i para cada $i \in \{0, \ldots, n\}$:

$$P^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \qquad 0 \leq i \leq n, \qquad 0 \leq k \leq m_i.$$

Grado del polinomio osculante.

$$\deg(P) \leq M = n + \sum_{i=0}^{n} m_i.$$

Caso particular: polinomio de Taylor. Corresponde a $n = 0$ (un punto).

Caso particular: polinomio de Lagrange. Corresponde a $m_0 = \ldots = m_n = 0$ (no hay condiciones para las derivadas).

Caso particular: polinomio de Hermite. Cuando $m_0 = \ldots = m_n = 1$.

1. Teorema (existencia y unicidad del polinomio de Hermite). Sean $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$ números distintos, $f \in C^1[a, b]$. Entonces existe un único polinomio H que concuerde con f y f' en $x_0, \ldots, x_n$. Este polinomio está dado por

$$H(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_j(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_j(x),$$

donde

$$H_j(x) = (1 - 2(x - x_j) L_j'(x_j)) L_j^2(x), \qquad \hat{H}_j(x) = (x - x_j) L_j^2(x).$$

Aquí

$$L_j(x) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

2. Construcción del polinomio de Hermite usando diferencias divididas. Definamos puntos $z_0, \ldots, z_{2n+1}$ por medio de

$$z_{2j} = z_{2j+1} = x_j, \qquad i \in \{0, \ldots, n\}.$$

y ponemos las condiciones

$$f[z_{2j}] = f[z_{2j+1}] = f(x_j), \quad f[z_{2j}, z_{2j+1}] = f'(z_{2j}) = f'(x_j).$$

Calculemos las demás diferencias divididas como siempre. Entonces

$$H(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} f[z_0, \ldots, z_k](x - z_0) \cdots (x - z_{k-1}).$$

3. Ejemplo. Construyamos el polinomio de Hermite que concuerde con f y f' en los puntos $x_0 = -1$, $x_1 = 2$, si

$$f(-1) = -9, \quad f'(-1) = 10, \qquad f(2) = 12, \quad f'(2) = 13.$$

Tabla de diferencias divididas (los datos iniciales están escritos con azul):

$z_0 = -1$	$f[z_0] = -9$			
$z_1 = -1$	$f[z_1] = -9$	$f[z_0, z_1] = 10$		
$z_2 = 2$	$f[z_2] = 12$	$f[z_1, z_2] = 7$	$f[z_0, z_1, z_2] = -1$	
$z_3 = 2$	$f[z_3] = 12$	$f[z_2, z_3] = 13$	$f[z_1, z_2, z_3] = 2$	$f[z_0, z_1, z_2, z_3] = 1$

Respuesta: $H(x) = x^3 - x^2 + 5x - 2$.

4. Ejercicio. Construya el polinomio de Hermite que concuerde con f y f' en los puntos -3, 2, si

$$f(-3) = -29, \quad f'(-3) = 47, \qquad f(2) = 6, \quad f'(2) = 17.$$

Haga la comprobación.

5. Ejercicio. Construya el polinomio de Hermite que concuerde con f y f' en los puntos $-1, 0, 2$, si

$$f(-1) = 5,\ f'(-1) = 12, \qquad f(0) = 2,\ f'(0) = -7, \qquad f(2) = -40,\ f'(2) = -51.$$

Haga la comprobación. Respuesta: $H(x) = x^5 - 4x^4 + x^2 - 7x + 2$.