Número de operaciones en la eliminación de Gauss

Objetivos. Calcular el número de las operaciones en algunos algoritmos de álgebra lineal, incluso la eliminación gaussiana y solución de un sistema triangular de ecuaciones lineales.

Requisitos. Eliminación gaussiana, solución de un sistema triangular de ecuaciones lineales, producto de matrices triangulares.

1. Fórmulas útiles.

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n, \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Cambio de variable en una suma. En general, si $\varphi\colon A \to B$ es una biyección y $f\colon B \to \mathbb{R}$ es una función (cuyos valores estamos sumando), entonces

$$\sum_{p\in B} f(p) = \sum_{q\in A} f(\varphi(q)).$$

Por ejemplo, consideremos la suma

$$\sum_{p=1}^{n} (n+1-p).$$

Aquí $B = \{1,\ldots,n\}$, $f(p) = n-p$. Es cómodo hacer el cambio de variable $p = n+1-q$, correspondiente a la biyección $\varphi(q) = n+1-q$. Despejando q de la igualdad $p = n+1-q$ obtenemos $q = n+1-p$, esto es, la función inversa de φ actúa por la regla $\varphi^{-1}(p) = n+1-p$. Es fácil ver que cuando p corre de 1 a n, la variable $q = n+1-p$ corre de n a 1 en el orden descendiente. Por eso

$$A = \{n, n-1, \ldots, 1\} = \{1, \ldots, n\}.$$

Ya todo está preparado para hacer el cambio de variable y calcular la suma:

$$\sum_{p=1}^{n} (n+1-p) = \sum_{q=1}^{n} q = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En ver de hacer razonamientos tan detallados, indicando las funciones y los conjuntos, es suficiente pensar de la siguiente manera:

$$\sum_{p=1}^{n} (n+1-p) = \left[\begin{array}{rcccc} & & q = n+1-p; & & \\ p = & 1, & 2, & \ldots, & n-1, & n; \\ q = & n, & n-1, & \ldots, & 2, & 1 \end{array}\right] = \sum_{q=1}^{n} q = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3. Pseudocódigo del algoritmo SolveUT.

```
Entrada: matriz cuadrada U, vector b;
    U debe ser triangular superior con entradas diagonales no nulas.
n := orden de la matriz U;
x := vector nulo de longitud n;
Para i := n, ..., 1:
    s := b[i];
    Para j := i + 1, ..., n:
        s := s - U[i, j] * x[j];
    x[i] := s / U[i, i];
Salida: x.
```

4. Análisis de algunos pasos del algoritmo.

- ¿Cuántas divisiones se hacen en cada iteración del ciclo?
- ¿Cuántas multiplicaciones se hacen en la primera iteración ($i = n$)?
- ¿Cuántas multiplicaciones se hacen en la segunda iteración ($i = n - 1$)?
- ¿Cuántas multiplicaciones se hacen en la i-ésima iteración?
- ¿Cuántas sustracciones se hacen en la primera iteración ($i = n$)?
- ¿Cuántas sustracciones se hacen en la segunda iteración ($i = n - 1$)?
- ¿Cuántas sustracciones se hacen en la i-ésima iteración?

5. Número de operaciones aritméticas en el algoritmo SolveUT. En cada iteración i tenemos $n - i + 1$ multiplicaciones y divisiones. En total,

$$\sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) = \left[\begin{array}{cccccc} & & q = n + 1 - i; & & & \\ i = & 1, & 2, & \ldots, & n - 1, & n; \\ q = & n, & n - 1, & \ldots, & 2, & 1 \end{array} \right] = \sum_{q=1}^{n} q = \frac{n^2 + n}{2}.$$

En cada iteración i, tenemos $n - i$ adiciones y sustracciones. En total,

$$\sum_{i=1}^{n} (n - i) = n^2 - \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}.$$

6. Pseudocódigo del algoritmo Reduce1.
Se considera el caso cuando la matriz original es de tamaño $n \times (n + 1)$.

```
Entrada: matriz A de tamaño n por n+1;
B := una copia de A;
Para k := 1, ..., n-1:
    // usamos B[k, k] como pivote
    Para i := k + 1, ..., n:
        mu := - B[i, k] / B[k, k];
        B[i, k] := 0;
        Para j := k + 1, ..., n + 1:
            B[i, j] := B[i, j] + mu * B[k, j];
Salida: B.
```

7. Número de operaciones aritméticas en el algoritmo Reduce1. En cada iteración del ciclo sobre i tenemos $n-k+2$ multiplicaciones y divisiones. En la k-ésima iteración del ciclo sobre k el número de multiplicaciones y divisiones es

$$(n-k)(n-k+2).$$

En total, el número de las operaciones de multiplicación y división es

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+2) &= \left[\begin{array}{ccccc} & & q=n-k; & & \\ k= & 1, & 2, & \ldots, & n-1; \\ q= & n-1, & n-2, & \ldots, & 1 \end{array}\right] = \sum_{q=1}^{n-1} q(q+2) \\ &= \sum_{q=1}^{n-1} q^2 + 2\sum_{q=1}^{n-1} q = \frac{(n-1)n(2n-2+1)}{6} + 2\frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + n(n-1) = \frac{(n-1)n(2n-1+6)}{6} \\ &= \frac{(n-1)n(2n+5)}{6}.\end{aligned}$$

Nótese que el término principal del polinomio es

$$\frac{n^3}{3}.$$

En cada iteración del ciclo sobre i tenemos $n-k+1$ sumas y restas. En la k-ésima iteración del ciclo sobre k el número de sumas y restas es

$$(n-k)(n-k+1) = n^2 - 2nk + k^2 + n - k.$$

En total, el número de sumas y restas es

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n^2 - 2nk + k^2 + n - k) = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}.$$

8. Ejercicio. Calcular el número de multiplicaciones y divisiones en el algoritmo de multiplicación de dos matrices triangulares superiores.

9. Ejercicio. Calcular el número de multiplicaciones y divisiones en el algoritmo de solución de una sistema tridiagonal de ecuaciones lineales.

10. Ejercicio. Calcular el número de multiplicaciones y divisiones en el algoritmo de Gauss-Jordan (cuando la matriz del sistema se reduce a la matriz identidad).