Solución de la ecuación de calor sobre un intervalo con una condición inicial trigonométrica

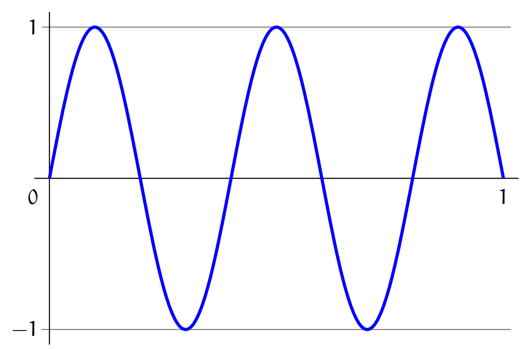
1. Problema. Supongamos que u es la solución de la ecuación

$$(D_2 u)(x,t) = (D_1^2 u)(x,t)$$

con las condiciones de frontera $u(0,t) = u(1,t) = 0$ y la condición inicial

$$u(x,0) = \operatorname{sen}(q\pi x).$$

Por ejemplo, si $q = 5$, la función $f(x) = \operatorname{sen}(q\pi x)$ tiene la siguiente gráfica (las escalas de los ejes no son iguales):



2. Separación de variables. Busquemos la solución en la forma $u(x,t) = V(x)W(t)$. Entonces para cada x en $(0,1)$ y cada $t > 0$ tenemos

$$\frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{V''(x)}{V(x)}.$$

El lado izquierdo no depende de x; el lado derecho no depende de t. Luego ambos lados no dependen de x ni de t y son iguales a una constante. La denotemos por λ. De la ecuación $W'(t) = \lambda W(t)$ obtenemos

$$W(t) = W(0)\, e^{\lambda t}.$$

Es natural buscar soluciones acotadas, por eso $\lambda < 0$. De la ecuación $V''(x) - \lambda V(x) = 0$ obtenemos

$$V(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}x).$$

Sustituimos la función $u(x,t) = V(x)W(t)$ en la condición de frontera $u(0,t) = 0$ y obtenemos $C_1 = 0$. Sustituimos la función u en la condición de frontera $u(1,t) = 0$ y obtenemos

$$\sqrt{-\lambda} = k\pi,$$

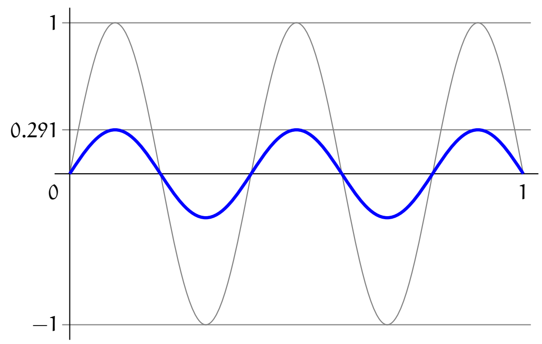
de donde $\lambda = -k^2\pi^2$. Ahora sustituimos la función $u(x,t) = C_2\, e^{-k^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(k\pi x)$ en la condición inicial:

$$C_2 \operatorname{sen}(k\pi x) = \operatorname{sen}(q\pi x).$$

Logramos obtener esta igualdad si ponemos $C_2 = 1$ y $k = q$. Llegamos a la respuesta final:

$$u(x,t) = e^{-k^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(q\pi x). \tag{1}$$

Por ejemplo, si $q = 5$ y $t = 0.005$, entonces $e^{-k^2\pi^2 t} \approx 0.291$, y la solución se ve de la siguiente manera:



3. Comprobación. Compruebe directamente que la función (1) resuelve el Problema 1.