Solución de la ecuación de calor sobre un intervalo usando series de Fourier

Agradezco a Gabino Sánchez Arzate y Yahir Uriel Guzmán Pérez por estudiar juntos algunos aspectos de este tema.

1. La ecuación de calor sobre un intervalo finito. Consideremos la ecuación

$$(D_2 u)(x,t) = (D_1^2 u)(x,t) \qquad (0 < x < 1,\ t > 0), \tag{1}$$

o, en la notación clásica, $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$. Suponemos que la función u se anula en la frontera del intervalo:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0 \qquad (t \geq 0), \tag{2}$$

y satisface una condición inicial:

$$u(x,t) = f(x) \qquad (0 \leq x \leq 1). \tag{3}$$

Suponemos que $f \in C([0,1])$, $f(0) = f(1) = 0$.

2. Separación de variables. Busquemos una solución particular de (1) con (2) en forma

$$u(x,t) = V(x)W(t).$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$\frac{W'(t)}{W(t)} = \frac{V''(x)}{V(x)}.$$

El cociente no depende de x ni de t, lo denotemos por λ. Entonces

$$V(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{-\lambda}).$$

Sustituyendo V en las condiciones de frontera (2) obtenemos que $C_1 = 0$ y $\sqrt{-\lambda} = k\pi$. Luego $\lambda_k = -k^2\pi^2$. Encontramos una solución particular

$$e^{-k^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(k\pi x).$$

Si

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \operatorname{sen}(k\pi x), \tag{4}$$

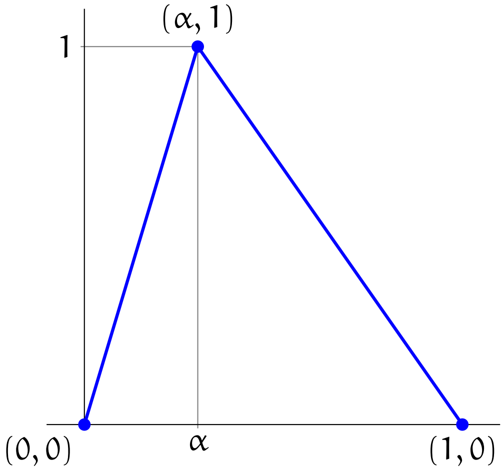
entonces la siguiente función es una solución del problema:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{-k^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(k\pi x).$$

Los coeficientes de Fourier f_k se pueden encontrar mediante la siguiente fórmula:

$$f_k = 2 \int_0^1 f(x) \operatorname{sen}(k\pi x)\, dx. \tag{5}$$

3. Ejemplo de condición inicial: una función lineal a trozos.



Esta función lineal a trozos está dada por la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\alpha}, & 0 \le x \le \alpha; \\ \\ \dfrac{1-x}{1-\alpha}, & \alpha \le x \le 1. \end{cases}$$

Calculemos sus coeficientes de Fourier:

$$f_k = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha x \operatorname{sen}(k\pi x)\, dx + \frac{2}{1-\alpha} \int_\alpha^1 (1-x) \operatorname{sen}(k\pi x)\, dx = \frac{2 \operatorname{sen}(k\alpha\pi)}{k^2\pi^2(1-\alpha)\alpha}.$$

Para esta condición inicial la solución del Problema 1 es

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi^2\alpha(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(k\alpha\pi)}{k^2}\, e^{-k^2\pi^2 t} \operatorname{sen}(k\pi x). \tag{6}$$

Se recomienda programar una función

```
function [u] = triangularsolution(al, x, t)
```

que calcule los valores de esta función en los puntos dados. Es suficiente calcular la suma parcial de la serie (6) hasta un k suficientemente grande, digamos hasta $k = 1000$.