El método de disparo
para problemas lineales de frontera

Objetivos. Resolver los problemas con valores de frontera para ecuaciones diferencias de segundo orden usando el método de disparo.

Requisitos. Teorema de Picard sobre la existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy, métodos numéricos para resolver ecuaciones diferencias con condiciones iniciales.

1. Problema con valores de frontera para una ecuación de segundo orden. Se busca una función $x \in C^2([a,b])$ tal que

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \tag{1}$$

$$x(a) = \alpha, \qquad x(b) = \beta.$$

Se supone que f es una función de clase $C^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $a < b$, $c, d \in \mathbb{R}$. Denotando $x'(t)$ por $y(t)$ podemos escribir la ecuación original (1) como un sistema de EDO de primer orden:

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t), \\ y'(t) &= f(t, x(t), y(t)). \end{aligned} \tag{2}$$

En forma vectorial,

$$Z'(t) = F(t, Z(t)),$$

donde

$$Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \qquad F(t, w) = \begin{bmatrix} w_2 \\ f(t, w_1, w_2) \end{bmatrix} \qquad (t \in [a,b],\ w \in \mathbb{R}^2).$$

2. El caso lineal. Supongamos que la función f es de la siguiente forma:

$$f(t, u, v) = p(t)v + q(t)u + r(t).$$

En otras palabras, estamos resolviendo una ecuación de segundo orden con condiciones de frontera:

$$x''(t) = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t), \qquad x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta. \tag{3}$$

3. El problema con valores iniciales. Supongamos que $p, q \in C^1([a,b])$, $r \in C([a,b])$, y que las funciones p, q, r, p', q' son acotadas. Para cualquier número γ consideramos el problema con valores iniciales

$$x''(t) = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t), \qquad x(a) = \alpha, \quad x'(a) = \gamma. \tag{4}$$

Escribimos este problema en forma vectorial:

$$Z'(t) = F(t, Z(t)), \qquad Z(a) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Aquí

$$Z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix}, \qquad F(t, w) = \begin{bmatrix} w_2 \\ p(t)w_2 + q(t)w_1 + r(t) \end{bmatrix}.$$

Las condiciones sobre p y q implican que la función F es continua y Lipschitz continua respecto al segundo argumento. Luego para cualesquiera α y γ el problema (5) tiene una única solución. Lo mismo es cierto para el problema (4). Para cada γ denotemos por Z_γ a la solución del problema (5), y por x_γ a la primera componente de Z_γ. Entonces x_γ es la solución del problema (4). La idea del método de disparo: variando γ obtener una solución del problema original (3).

4. El método de disparo para resolver el problema de valores de frontera en el caso lineal. Usamos la notación introducida arriba, y resolvemos el problema con valores iniciales para $\gamma = 0$, luego para $\gamma = 1$. Las funciones correspondientes son x_0 y x_1:

$$\begin{aligned} x_0''(t) &= p(t)x_0'(t) + q(t)x_0(t) + r(t), \qquad & x_0(a) &= \alpha, \qquad & x_0'(a) &= 0, \\ x_1''(t) &= p(t)x_1'(t) + q(t)x_1(t) + r(t), \qquad & x_1(a) &= \alpha, \qquad & x_1'(a) &= 0. \end{aligned}$$

Busquemos la solución del problema original (3) como una *combinación convexa* de las funciones x_0 y x_1:

$$x(t) = \lambda x_0(t) + (1-\lambda)x_1(t).$$

Entonces x satisfface la ecuación (3):

$$\begin{aligned} x''(t) &= \lambda(p(t)x_0'(t) + q(t)x_0(t) + r(t)) + (1-\lambda)(p(t)x_1'(t) + q(t)x_1(t) + r(t)) \\ &= p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t). \end{aligned}$$

Además x satisface la condición de frontera izquierda:

$$\begin{aligned} x(a) &= \lambda x_0(a) + (1-\lambda)x_1(a) \\ &= \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha. \end{aligned}$$

Calculemos el valor de x en la frontera derecha:

$$x(b) = \lambda x_0(b) + (1-\lambda)x_1(b).$$

Elegimos λ de tal manera que $x(b)$ sea igual al número dado β:

$$\lambda = \frac{\beta - x_1(b)}{x_0(b) - x_1(b)}. \tag{6}$$