Propiedades de las matrices de Toeplitz tridiagonales con entradas $-1, 2, -1$

Agradezco a Gabino Sánchez Arzate por estudiar juntos los temas presentados en estos apuntes.

1. La matriz de Toeplitz tridiagonal asociada al problema de Laplace–Dirichlet.

$$T_5 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Formalmente, si $j, k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(T_n)_{j,k} = \begin{cases} 2, & j = k; \\ -1, & |j-k| = 1; \\ 0, & |j-k| \geq 2. \end{cases}$$

2. Proposición (la inversa de la matriz de Toeplitz tridiagonal asociada al problema de Laplace–Dirichlet).

$$(T_n^{-1})_{j,k} = \begin{cases} \dfrac{k(n+1-j)}{n+1}, & j \geq k; \\[2ex] \dfrac{j(n+1-k)}{n+1}, & k \geq j. \end{cases} \tag{1}$$

Demostración. Denotemos por B_n a la matriz cuya entrada (j,k) está definida por el lado derecho de (1). Si $p \in \{2, \ldots, n-1\}$, entonces

$$(T_n B_n)_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} (T_n)_{p,k} (B_n)_{p,q} = -(B_n)_{p-1,q} + 2(B_n)_{p,q} - (B_n)_{p+1,q}. \tag{2}$$

En el caso $p = 1$ tenemos

$$(T_n B_n)_{1,q} = 2(B_n)_{1,q} - (B_n)_{2,q} = -\underbrace{(B_n)_{0,q}}_{0} + 2(B_n)_{1,q} - (B_n)_{2,q},$$

y en el caso $p = n$ tenemos

$$(T_n B_n)_{n,q} = -(B_n)_{n-1,q} + 2(B_n)_{n,q} = -(B_n)_{n-1,q} + 2(B_n)_{n,q} - \underbrace{(B_n)_{n+1,q}}_{0},$$

así que la fórmula (2) sigue siendo válida para $p = 1$ y para $p = n$.

Primero supongamos que $p > q$. Entonces todas las tres entradas de B_n que participan en (2) corresponden al primer caso de la fórmula (1). Luego en este caso

$$(T_n B_n)_{p,q} = -\frac{q(n+1-p+1)}{n+1} + \frac{2q(n+1-p)}{n+1} - \frac{q(n+1-p-1)}{n+1} = 0.$$

Ahora supongamos que $p = q$. Entonces

$$\begin{aligned}(T_n B_n)_{p,p} &- (B_n)_{p-1,p} + 2(B_n)_{p,p} - (B_n)_{p+1,p} \\ &= -\frac{(p-1)(n+1-p)}{n+1} + \frac{2p(n+1-p)}{n+1} - \frac{p(n+1-p-1)}{n+1} \\ &= \frac{n(-p+1+2p-p) + (p-1)^2 - 2p(p-1) + p^2}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1.\end{aligned}$$

Si $p = 1$, entonces

$$(T_n B_n)_{p,q} = 2(B_n)_{1,q} - (B_n)_{2,q}$$

El caso $p < q$ es similar al caso $p > q$. $\square$

3. Corolario (sobre la norma de la matriz T_n^{-1} asociada a la norma–máximo vectorial).

$$\|T_n^{-1}\|_{\mathrm{matr},\infty} \le \frac{(n+1)^2}{8}.$$

Demostración. Se sabe que

$$\|T_n^{-1}\|_{\mathrm{matr},\infty} = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} (T_n^{-1})_{j,k}.$$

Consideremos la suma interior:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (T_n^{-1})_{j,k} &= \sum_{k=1}^{j} \frac{k(n+1-j)}{n+1} + \sum_{k=j+1}^{n} \frac{j(n+1-k)}{n+1} \\ &= \frac{n+1-j}{n+1} \sum_{k=1}^{j} k + \frac{j}{n+1} \sum_{k=j+1}^{n} (n+1-k) \\ &= \frac{(n+1-j)j(j+1)}{2(n+1)} + \frac{j(n-j)(n+1-j)}{2(n+1)} = \frac{j(n+1-j)}{2}.\end{aligned}$$

La última expresión se puede acotar así:

$$j(a-j) = -(j^2 - aj) = -\left(j - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} \le \frac{a^2}{4}. \qquad \square$$

4. La matriz de la Transformada Discreta de Seno.

$$S_n := \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[\operatorname{sen} \frac{pq\pi}{n+1}\right]_{p,q=1}^{n}.$$

Es obvio que S_n es real y simétrica. Además, se puede demostrar que S_n tiene propiedad involutiva: $S_n^2 = I_n$. Por lo tanto, S_n es una matriz ortogonal. En este curso no utilizamos esta propiedad.

5. Dos fórmulas trigonométricas (repaso).

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{3}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2. \tag{4}$$

6. Proposición (los valores y vectores propios de la matriz tridiagonal de Toeplitz con las entradas $-1, 2, -1$).

$$T_n S_n = S_n \operatorname{diag}(\Lambda_n),$$

donde

$$\Lambda_n = \left[\lambda_{n,q}\right]_{q=1}^{n}, \qquad \lambda_{n,q} = 4\left(\operatorname{sen}\frac{q\pi}{2(n+1)}\right)^2.$$

En otras palabras, las columnas de la matriz S_n son vectores propios de T_n, y los valores propios correspondientes son $\lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,n}$.

Demostración. Sea $q \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos por v a la q-ésima columna de S_n, sin el coeficiente $\sqrt{2/(n+1)}$:

$$v = \left[\operatorname{sen}\frac{pq\pi}{n+1}\right]_{p=1}^{n}.$$

Tenemos por demostrar que $T_n v = \lambda_{n,q} v$. Definimos $v_0 = 0$ y $v_{n+1} = 0$. Esta definición está en concordancia con la fórmula $\operatorname{sen}\frac{pq\pi}{n+1}$. Calculemos la p-ésima entrada del producto $S_n v$:

$$(T_n v)_p = -v_{p-1} + 2v_p - v_{p+1} = 2\operatorname{sen}\frac{pq\pi}{n+1} - \operatorname{sen}\frac{(p-1)q\pi}{n+1} - \operatorname{sen}\frac{(p+1)q\pi}{n+1}$$

aplicamos la fórmula (3), luego (4)

$$= 2\operatorname{sen}\frac{pq\pi}{n+1}\left(1 - \cos\frac{q\pi}{n+1}\right) = 4\left(\operatorname{sen}\frac{q\pi}{2(n+1)}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{pq\pi}{n+1} = \lambda_{n,q} v_p.$$

Hemos demostrado que $T_n v = \lambda_{n,q} v$. El vector v, salvo un factor, fue la columna general de la matriz S_n. Por lo tanto, $T_n S_n = S_n \operatorname{diag}(\Lambda_n)$. $\square$

7. Corolario (una cota superior de la norma de la inversa de la matriz tridiagonal de Toeplitz con entradas $-1, 2, -1$).

$$\|T_n^{-1}\|_{\mathrm{matr},2} \le \frac{(n+1)^2}{4}.$$

Demostración. Se sabe que $\|T_n^{-1}\| = \lambda_{n,1}^{-1}$ y que

$$\operatorname{sen} x \ge \frac{2}{\pi} x \qquad (x \in [0, \pi]).$$

Por eso

$$\|T_n^{-1}\|_{\mathrm{matr},2} \le \left(\frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2(n+1)}} \right)^2 \le \left(\frac{\pi}{4} \, \frac{2(n+1)}{\pi} \right)^2 = \frac{(n+1)^2}{4}. \qquad \square$$