Programación: construcción de las matrices tridiagonales simétricas de Toeplitz y estudio experimental de sus propiedades

Objetivos. En métodos de diferencias finitas surgen de manera natural matrices tridiagonales simétricas de Toeplitz. Vamos a construir estas matrices y observar algunas de sus propiedades.

1. Construir una matriz dispersa con una diagonal no nula. Ejecute los siguientes comandos en el intérprete de Matlab/Octave:

```
A = spdiags([81; 82; 83; 84; 85; 86], 2, 6, 6);
full(A)
A = spdiags([81; 82; 83; 84; 85; 86], -2, 6, 6);
full(A)
v = randn(7, 1);
A = spdiags(v, 1, 5)
full(A)
```

2. Construir una matriz dispersa de varias diagonales.

```
D = [31 41 51; 32 42 52; 33 43 53; 34 44 54; 35 45 55]
A = spdiags(D, -1 : 1, 5, 5)
full(A)
```

En este tema construimos solamente matrices cuyas diagonales son constantes (matrices de Toeplitz). Ejecute los siguientes comandos:

```
D = repmat([4, 5, 6], 7, 1)
A = spdiags(D, -1 : 1, 7, 7)
full(A)
```

3. Matriz tridiagonal de Toeplitz con entradas $-1, 2, -1$. Las diferencias finitas de segundo orden, $x_{j-1} - 2x_j + x_{j+1}$, después de factorizar -1, se pueden calcular como $T_n x$, donde T_n es la matriz tridiagonal de Toeplitz de orden n con entradas -1, 2, -1. Por ejemplo, para $n = 5$,

$$T_6 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Escriba una función que construya y regrese la matriz tridiagonal de Toeplitz con entradas diagonales -1, 2, -1, de orden dado n, en el formato de matriz dispersa.

```
function [T] = tmatrix(n),
   D = repmat(???, ???, ???);
   T = spdiags(???, ???, ???, ???);
end
```

Prueba:

```
T = tmatrix(6)
full(T)
```

Matriz de la transformada discreta de seno

4. Consideremos la matriz

$$S_n = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[\operatorname{sen} \frac{jk\pi}{n+1} \right]_{j,k=1}^{n} .$$

Se sabe que la matriz S_n es simétrica e involutiva:

$$S_n^\top = S_n, \qquad S_n^2 = S_n.$$

Vamos a construir la matriz S_n. Usamos el producto diádico para construir la matriz $\left[jk\right]_{j,k=1}^{n}$. Ejecute los siguientes comandos:

```
krow = 1 : 3
jcol = (1 : 3)'
jkmatrix = jcol * krow
```

Escriba una función que construya y devuelva la matriz S_n de orden dado n:

```
function [S] = dstmatrix(n),
   krow = ???; jcol = ???; jkmatrix = ???;
   S = sin(pi * jkmatrix) * sqrt(2 / (???));
end
```

Pruebas:

```
S = dstmatrix(5)
S * S
```

Diagonalización de la matriz tridiagonal de Toeplitz con entradas $-1, 2, -1$

5. Se sabe que $S_n T_n S_n = \mathrm{diag}(\Lambda_n)$, donde Λ_n es el vector

$$\Lambda_n = \left[4 \,\mathrm{sen}^2 \frac{j\pi}{2(n+1)} \right]_{j=1}^{n}. \qquad (1)$$

Comprobemos esta propiedad. Escriba una función que calcule el vector de los valores propios de la matriz T_n por la fórmula (1).

```
function [la] = eigtoeplitztridiagonal(n),
   jcol = ???;
   la = (2 * sin(???)) .^ 2;
end
```

Prueba:

```
T = tmatrix(5)
S = dstmatrix(5)
la = eigtoeplitztridiagonal(5)
S * T * S
diag(la)
norm(S * T * S - diag(la))
```

Matriz del método explícito para resolver la ecuación de calor

6. Dado $\rho > 0$, consideremos la matriz $A_{\rho,n} = I_{n-1} - \rho T_{n-1}$. Por ejemplo,

$$A_{\rho,5} = \begin{bmatrix} 1-2\rho & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \rho & 1-2\rho & \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 1-2\rho & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 1-2\rho & \rho \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 1-2\rho \end{bmatrix}.$$

Verifique para varios valores de n que si $\rho < 1/2$, entonces $\|A_{\rho,n}\|_{\mathrm{matr,inf}} \le 1$:

```
A = eye(6) - 0.4 * tmatrix(6)
norm(A, inf)
```

Verifique que si $\rho > 1/2$ y n es suficientemente grande, entonces algunos de los valores propios de A_n tienen valor absoluto mayor a 1.

```
A = eye(10) - 0.8 * tmatrix(10);
la = eig(A)
max(abs(la))
```

Matriz del método implícito para resolver la ecuación de calor

7. D.ado $\rho > 0$, consideremos la matriz $B_{\rho,n} = (I_{n-1} + \rho T_{n-1})^{-1}$. Verifique numéricamente que $\|B_{\rho,n}\|_{\mathrm{matr,inf}} \leq 1$ y que los valores propios de $B_{\rho,n}$ tienen valores absolutos estrictamente menores que 1.

```
B = inv(eye(7) + 0.3 * tmatrix(7))
norm(B, inf)
la = eig(B)
max(abs(la))
```

Matriz del método de Crank y Nicolson para resolver la ecuación de calor

8. D.ado $\rho > 0$, consideremos la matriz

$$C_{\rho,n} = (2I_{n-1} + \rho T_{n-1})^{-1}(2I_{n-1} - \rho T_{n-1}).$$

Verifique numéricamente que $\|B_{\rho,n}\|_{\mathrm{matr,inf}} \leq 1$ y que los valores propios de $B_{\rho,n}$ tienen valores absolutos estrictamente menores que 1.

```
C = inv(2 * eye(7) + 0.3 * tmatrix(7)) * (2 * eye(7) - 0.3 * tmatrix(7))
norm(C, inf)
la = eig(C)
max(abs(la))
```